Table des matières

Préliminaire :

Une courbe est un ensemble de points.

Dans un repère du plan, les points sont repérés.

Lorsque les points sont repérés par leurs coordonnées cartésiennes, on cherche à établir une relation entre les coordonnées d'un point courant de la courbe (un point qui décrit la courbe).

On obtient ainsi une équation (cartésienne) de la courbe.

1- Propriété fondamentale

La phrase à comprendre dans toutes les occasions (intersection de courbes, position relative de courbes ...)

Un point appartient à une courbe $\mathscr{C}$ d'équation (E) si et seulement si les coordonnées de ce point vérifient (sont solutions) de l'équation (E)

un exemple :

Dans un repère orthonormé, un cercle est l'ensemble des points $M(x\ ;y)$ tels que la distance de M au centre $\Omega(a\ ;b)$ est égale à une constante positive r (rayon).

Autrement dit : $\Omega M = r$

Comme les nombres sont positifs, on obtient l'équivalence :

$\Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$

Dans un repère orthonormé, on sait : $\Omega M^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$

Finalement : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ avec $r > 0$ est une équation de cercle.

Intersection d'un cercle et d'une parabole.

Soit le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 1$ et la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 - 3$.

Les coordonnées des points d'intersection s'ils existent entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ sont solutions du système

$\begin{cases}(x-1)^2+(y+3)^2=1\\ y=x^2-3\end{cases}$, soit : $(x-1)^2 + (x^2-3+3)^2 = 1$, d'où, $x^2 - 2x + 1 + x^4 = 1$

En réorganisant : $x^4 + x^2 - 2x = 0$, soit : $x(x^3 + x - 2) = 0$

Les solutions sont : $x = 0$, $x = 1$ (solution évidente de $x^3 + x - 2 = 0$) (Vérifier : $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$

Les points d'intersection : $A(0\ ;-3)$, $B(1\ ;-2)$

2- Cas particulier d'une fonction.

Soit une fonction f définie sur un ensemble numérique D_f.

L'ensemble des points $M(x\ ;f(x))$ avec $x \in D_f$ décrit une courbe C_f appelée représentation graphique de f.

Une équation de C_f est alors : $y = f(x)$.

et cas particulier d'une fonction affine

Une fonction affine est représentée par une droite et une équation de cette droite est : $y = ax + b$.

I- Deux points distincts : proportionnalité des écarts (Seconde et classes suivantes)

On connaît deux points distincts A et B par leurs coordonnées.

Pour tout point $M(x\,;\,y)$ de la droite (AB), on a : $\dfrac{y-y_A}{x-x_A} = \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Exemple :

dans un repère, $A(2\,;\,-1)$ et $B(-3\,;\,4)$.

La droite (AB) a pour équation : $\dfrac{y-(-1)}{x-2} = \dfrac{4-(-1)}{-3-2}$, soit : $y = -(x-2) - 1 = -x + 1$

II- Deux points distincts : vecteurs colinéaires (Seconde et classes suivantes)

On connaît deux points distincts A et B par leurs coordonnées.

Pour tout point $M(x\,;\,y)$ de la droite (AB), on a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

La relation de colinéarité mène à : $(x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A)$

Exemple :

dans un repère, $A(2\,;\,-1)$ et $B(-3\,;\,4)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$, d'où, $5(x-2) = -5(y+1)$

Après réduction : La droite (AB) a pour équation : $y = -x + 1$

III- Un point et le coefficient directeur (Seconde et classes suivantes)

On connaît les coordonnées d'un point A de $\mathscr{D}$ et le coefficient directeur m de la droite $\mathscr{D}$.

Pour tout point $M(x\,;\,y)$ de la droite $\mathscr{D}$, on a : $\dfrac{y-y_A}{x-x_A} = m$

Exemple :

dans un repère, $A(2\,;\,-1)$ et $m = -3$

$\dfrac{y-(-1)}{x-2} = -3$, soit : $y = -3(x-2) - 1 = -3x + 5$

À partir de la première : Cas de la tangente

à C_f au point d'abscisse a. (Ce n'est qu'un cas particulier)

Le point de contact est $A(a\,;\,f(a))$ et le coefficient directeur de la tangente est $f'(a)$, d'où, pour une équation de tangente en A d'abscisse a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$