Table des matières

I- Préliminaire:

Faire des maths:

ce n'est pas appliquer un livre de recettes.

Les techniques, les méthodes

Les techniques, les méthodes à utiliser s'appuient toujours sur des connaissances de bases ....

et s'appliquent **sous conditions** ...

c'est-à-dire:

avant d'appliquer une technique, une méthode, on doit s'assurer qu'on est bien dans le cadre où cette technique, cette méthode s'appliquent.

Les propriétés, les théorèmes

Les propriétés, les théorèmes s'énoncent sous la forme: Si (hypothèses) alors (conclusion)

On cherche à appliquer une propriété pour montrer la conclusion (la phrase qui suit "alors")

Pour cela, on est amené à prouver les hypothèses de la propriété.

Exemples:

Propriété: Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Pour appliquer ce théorème, on prouve qu'un certain triangle est un triangle rectangle et ensuite, on peut calculer la longueur d'un des côtés connaissant les deux autres.

II- La fonction $x \mapsto 1 - xE(1/x)$

Prérequis:

- Connaître la définition de la fonction partie entière

(on doit encadrer le nombre dont on prend la partie entière par deux entiers **consécutifs**)

- Connaître la définition de la continuité en a

(la fonction est définie en a, la fonction admet une limite en a et cette limite est $f(a)$)

- Connaître les théorèmes permettant de calculer une limite.

II-1- Étude analytique

On définit la fonction f de la façon suivante:

$$\begin{cases} \text{Si } x \neq 0 \text{, alors } f(x) = 1 - xE\left(\frac{1}{x}\right) & \text{où } E \text{ est la fonction partie entière.} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ par construction.

On cherche la partie entière de $\frac{1}{x}$, d'où, on porte un premier regard sur l'encadrement de $\frac{1}{x}$ par deux entiers consécutifs.

On peut remarquer que si $n \leqslant \frac{1}{x} < n + 1$, c'est-à-dire: si $\frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}$ où n est entier, la fonction s'écrit: $f(x) = 1 - nx$.

Sur chaque intervalle $\left]\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$, la restriction de f est une **fonction affine** et sa représentation graphique est un segment ouvert à gauche, fermé à droite.

f est une fonction affine par morceaux

Montrons que cette fonction est continue en 0.

Autrement dit:

Montrons $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

On sait (fonction partie décimale vue en classe) que: $0 \leqslant t - E(t) < 1$ pour tout réel t.

On peut poser pour $x \neq 0$, $t = \frac{1}{x}$ et la double inégalité précédente devient:

$$0 \leqslant \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right) < 1 \qquad (1)$$

*** Si $x > 0$, de (1), on tire: $0 \leqslant 1 - xE\left(\frac{1}{x}\right) < x$ (2)

Le théorème des gendarmes permet de conclure à partir de (2), $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$

La limite à droite de *f* en 0 est 0

*** Si $x < 0$, de (1), on tire: $0 \geqslant 1 - xE\left(\frac{1}{x}\right) > x$ (3)

Le théorème des gendarmes permet de conclure à partir de (3), $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$

La limite à gauche de *f* en 0 est 0.

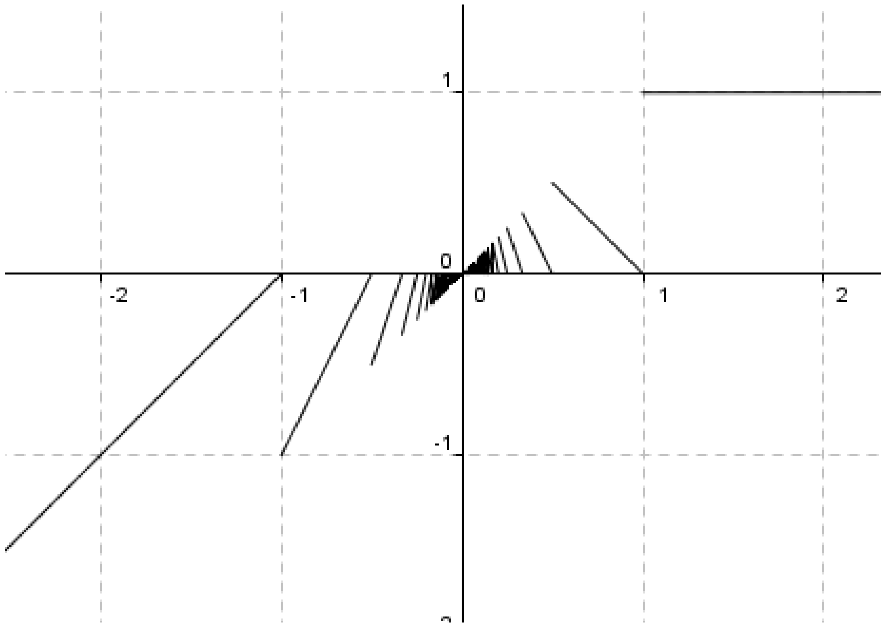
*** Conclusion: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$

La fonction *f* a une limite en 0 et cette limite est *f*(0).

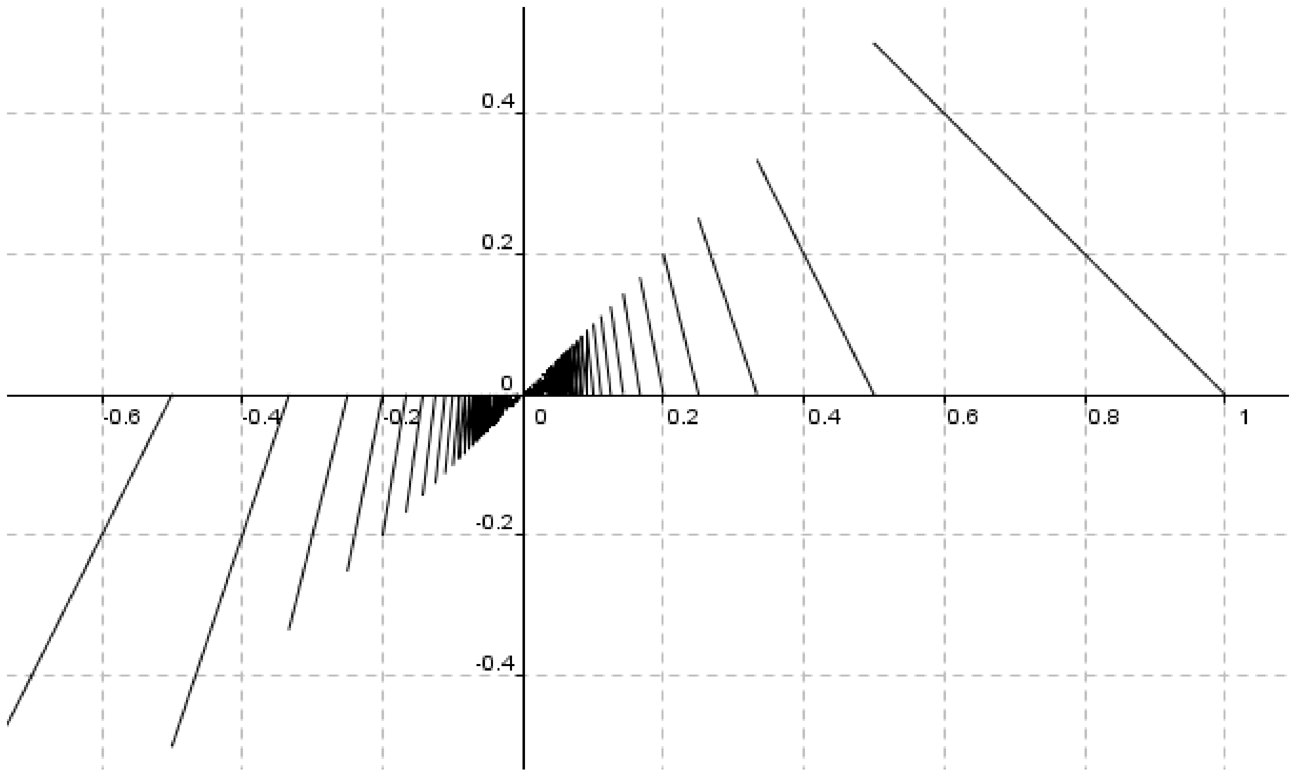
f est donc continue en 0.

II-2- Observation graphique

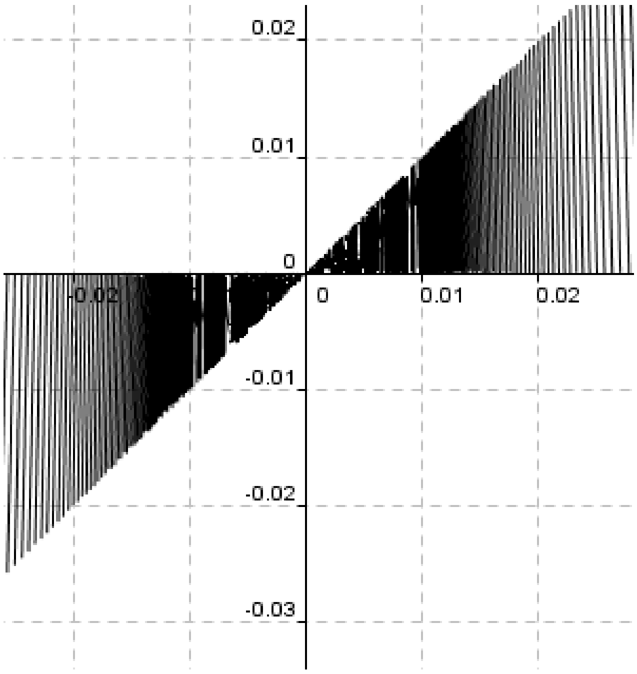
Vu de loin ...



Un zoom autour de 0



Zoomons davantage



Et encore plus