Intersection de deux droites et système à deux inconnues.

Index

Objectif:

Déterminer une équation de droites passant par deux points.

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues. Lui donner du sens.

1- Énoncé:

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-1; 2)$, $B(1; -1)$, $C(2; 1)$, $D(-2; -2)$
Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection I des droites (AB) et (CD).

Une méthode:

Soit $M(x; y)$.
Le point M appartient à (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires:
On a: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-1)\\-1-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-(-1)\\y-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}$.
Finalement!: $M \in (AB)$ si et seulement si ses coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation: $2(y-2) = -3(x+1)$ (1)

Le point M appartient à (CD) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires:
On a: $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2-(-2)\\1--2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}$.
Finalement!: $M \in (CD)$ si et seulement si ses coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation: $4(y-1) = 3(x-2)$ (2)

Comme I est le point d'intersection des deux droites, ses coordonnées vérifient les deux équations (1) et (2).
Les coordonnées de I sont solutions du système: $\begin{cases}2(y-2)=-3(x+1)\\4(y-1)=3(x-2)\end{cases}$
Résolution du système: on peut remarquer qu'en ajoutant les deux équations membre-à-membre, il ne reste qu'une inconnue y, d'où, $(2y-4) + (4y-4) = (-3x-3) + (3x-6)$, soit: $6y = -1$. $y = -\frac{1}{6}$

En remplaçant y par $-\frac{1}{6}$ dans l'une des équations, il vient: $x = \frac{4}{9}$ (Faire le calcul)

Conclusion: $I(\frac{4}{9} ; -\frac{1}{6})$

Une autre méthode:

Les points A et B, ainsi que les points C et D, ont des abscisses différentes. Ni la droite (AB), ni la droite (CD) ne sont parallèles à l'axe des abscisses.

Intersection de deux droites et système à deux inconnues.

On sait alors que les droites représentent des fonctions affines et on peut chercher les coefficients a et b tels que $y = ax + b$.

Équation réduite de (AB):

Comme $A \in (AB)$, on a: $2 = -a + b$

Comme $B \in (AB)$, on a: $-1 = a + b$

Résolution du système: $\begin{cases} 2 = -a + b \\ -1 = a + b \end{cases}$, on trouve $a = -\dfrac{3}{2}$ et $b = \dfrac{1}{2}$ (Faire le calcul)

L'équation réduite de (AB) est $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$ (3)

Équation réduite de (CD):

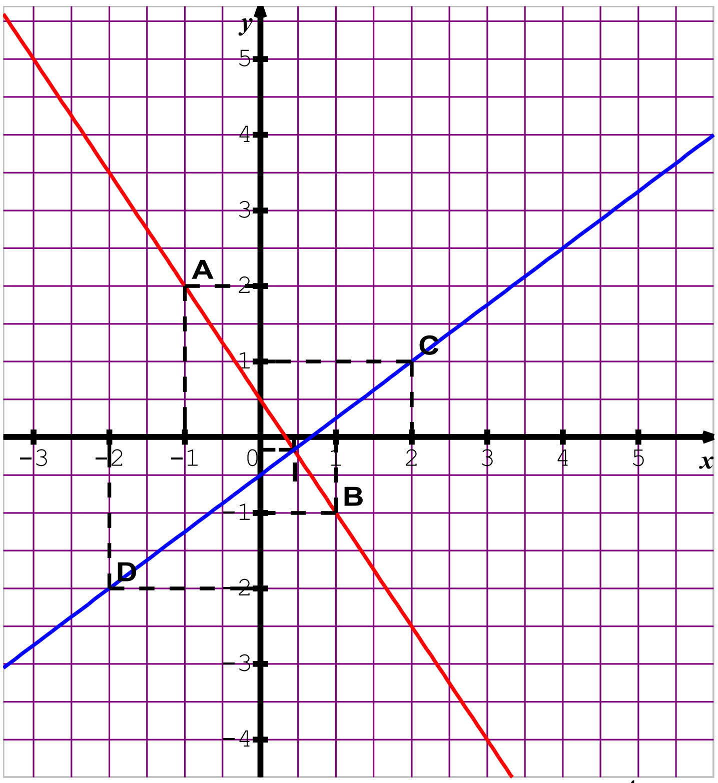
Comme $C \in (CD)$, on a: $1 = 2a + b$

Comme $D \in (CD)$, on a: $-2 = -2a + b$

Résolution du système: $\begin{cases} 1 = 2a + b \\ -2 = -2a + b \end{cases}$, on trouve $a = \dfrac{3}{4}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$ (Faire le calcul)

L'équation réduite de (CD) est $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$ (4)

Comme I est le point d'intersection des deux droites, ses coordonnées vérifient les deux équations (1) et (2).



Les coordonnées de I sont solutions du système: $\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2} \end{cases}$

On trouve $I\left(\dfrac{4}{9} ; -\dfrac{1}{6}\right)$

Intersection de deux droites et système à deux inconnues.

Remarques:

Dans la première méthode, quelque soit la droite, on trouve une équation de la forme $ax + by + c = 0$. (Équation cartésienne d'une droite)

Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite

Lorsque $b \neq 0$, on peut mettre sous la forme $y = mx + p$ avec $m = -\dfrac{a}{b}$ (coefficient directeur de la droite)

Par exemple pour (AB), un vecteur directeur est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et l'équation (1) peut s'écrire: $-3x - 2y + 1 = 0$

On peut aussi la mettre sous la forme: $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$ (Équation réduite)

2- Résumé:

Équations de droites

	Vecteur directeur	*Équation cartésienne*	*Coefficient directeur*	*Équation réduite*
Droite parallèle à l'axe des ordonnées	$\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$ax + c = 0$ avec $a \neq 0$	N'existe pas	$x = -\dfrac{c}{a}$
Droite parallèle à l'axe des abscisses	$\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$by + c = 0$ avec $b \neq 0$	$m = 0$	$y = -\dfrac{c}{b}$
Droite non parallèle aux axes	$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$	$ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$	$m = -\dfrac{a}{b}$	$y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$

Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur directeur d'une droite est aussi un vecteur directeur de cette droite.

Système à deux inconnues.

Toute équation de la forme $ax + by = c$ où $(a; b) \neq (0; 0)$ se représente par une droite.

Ainsi, un système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ est représenté par deux droites D_1 et D_2.

Trois cas peuvent apparaître:

1) Les droites D_1 et D_2 sont strictement parallèles. Le système n'a aucune solution.

2) Les droites D_1 et D_2 sont confondues. Le système a une infinité de solutions.

Dans ces deux cas, les vecteurs $\vec{u_1} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2} \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que leurs coordonnées forment un tableau de proportionnalité. $ab' = a'b$.

De plus dans le deuxième cas, les suites (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnelles

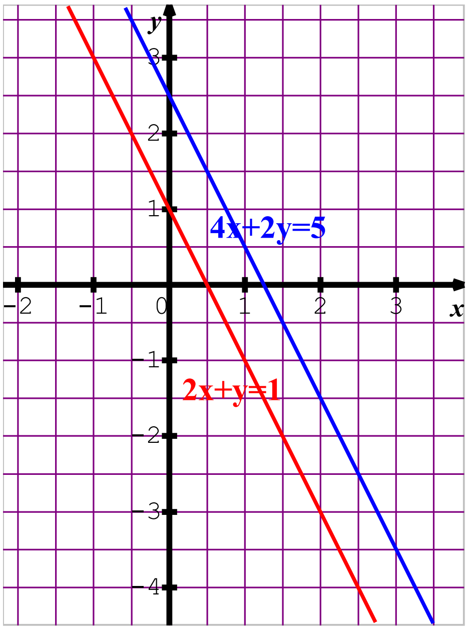
3) Les droites D_1 et D_2 sont sécantes. Le système a une et une seule solution représentée par le point d'intersection.

Dans ce cas, les vecteurs $\vec{u_1} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2} \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. $ab' \neq a'b$.

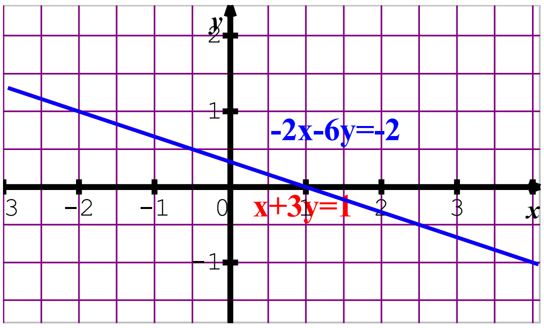
Intersection de deux droites et système à deux inconnues.

Illustrations

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+2y=5 \end{cases}$ Comme $2\times 2 = 4\times 1$, et que, $1\times 2 \neq 5$, le système n'a aucune solution.

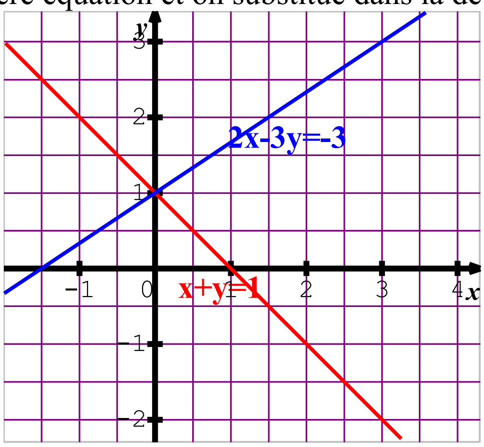


b) $\begin{cases} x+3y=1 \\ -2x-6y=-2 \end{cases}$. En multipliant la suite (1; 3; 1) par (–2), on trouve (–2; –6; –2). Le système a une infinité de solutions représentées par la droite d'équation réduite: $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$



c) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-3y=-3 \end{cases}$. Comme $1\times(-3) \neq 2\times 1$, le système a une et une seule solution.

Par exemple, on tire $y = 1 - x$ de la première équation et on substitue dans la deuxième.



$2x - 3(1 - x) = -3$, soit: $5x = 0$. On trouve $x = 0$, puis, $y = 1$. Le couple solution est (0; 1)