On a besoin d'étudier la limite en ω (ω est un nombre réel ou l'infini) d'une **fonction composée** : $f = v \circ u$.

Rien de plus simple si on se souvient de ce qu'est une fonction composée.

On part d'un nombre: **Départ**

↓

On applique la fonction u: ***Étape 1***

↓

On applique la fonction v : **Arrivée**

La fonction f est celle définie par: **Départ** $\mapsto$ **Arrivée.**

Pour étudier la limite en ω de f, on va se reposer à l'étape 1 avant de repartir.

Ce qui donne: On part de ω et on détermine la limite de la fonction u en ω

$$\lim_{x \to \omega} u(x) = \alpha$$ (α est un nombre réel ou l'infini)

On est en α à l'étape, on repart de cette étape et on détermine la limite en α de la fonction v.

$$\lim_{t \to \alpha} v(t) = l$$ (l est un nombre réel ou l'infini)

On est arrivé.

Conclusion: $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = l$

Exemples:

1) quelle est la limite en $+\infty$ de la fonction f: $x \mapsto \sqrt{\dfrac{4x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}}$?

f est la fonction composée $v \circ u$ avec $u(x) = \dfrac{4x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ et $v(t) = \sqrt{t}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 4$ (limite d "e fonction rationnelle) et $\lim\limits_{t \to 4} \sqrt{t} = 2$ (continuité de la fonction $\sqrt{\ }$ en 4),

donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

2) Quelle est la limite en 0 de la fonction f: $x \mapsto x^x$?

On sait que $f = v \circ u$ avec $u(x) = x \ln x$ et $v(t) = e^t$

On a successivement: $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = 0$ (résultat du cours) et $\lim\limits_{t \to 0} e^t = 1$ (continuité de la fonction exp en 0), d'où, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

3) Quelle est la limite en 1 de la fonction $f : x \mapsto \ln(x-1)$?

On a de façon évidente: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (x-1) = 0$ et $x - 1 > 0$, puis, $\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$, d'où, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = -\infty$.

4) quelle est la limite en $+\infty$ de f: $x \mapsto x \times \ln(1 + \dfrac{1}{x})$?

Quand x tend vers $+\infty$, le nombre $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 .... cela doit vous rappeler quelque chose, on ajoute une quantité qui tend vers 0 ... et comme $x = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}$, on pense à la forme $\dfrac{\ln(1+t)}{t}$ en 0.

f est donc la composée de la fonction inverse suivie de la fonction v définie par $v(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{t}$

Autrement écrit:

$x \mapsto \dfrac{1}{x} = t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t} = x \times \ln(1 + \dfrac{1}{x})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$ (Nombre dérivé en 1 de la fonction ln),

d'où, $\lim\limits_{x \to +\infty} x \times \ln(1 + \dfrac{1}{x}) = 1$