Logique et raisonnement

I- Négation d'une phrase

1) En mathématiques, une **proposition** est une phrase mathématique.
Une proposition peut être vraie ou fausse.
Exemple de phrases: (Dans les phrases qui suivent, la lettre x représente un nombre réel)

	Proposition	*Vrai ou faux*
A1	Le carré d'un nombre réel est positif	Vrai
A2	$x \leqslant 5$	Vrai si $x \in]-\infty; 5]$, Faux si $x \in]5;+\infty[$
A3	Il existe des rectangles qui ne sont pas des parallélogrammes	Faux

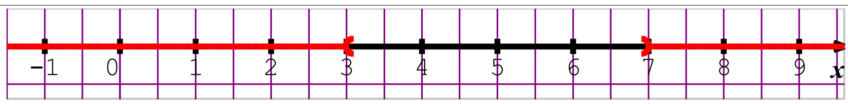
2) **Négation** d'une proposition
Soit une phrase A.
La phrase B est la négation de la phrase A lorsque:
Si A est vraie alors B est fausse et si A est fausse alors B est vraie.
La négation des phrases du 1) sont:

	Négation de la proposition A	*Vrai ou faux*
B1	Il existe un réel qui a un carré négatif.	Faux
B2	$x > 5$	Faux si $x \in]-\infty; 5]$, Vrai si $x \in]5;+\infty[$
B3	Tous les rectangles sont des parallélogrammes	Vrai

Exercice:
Écrire la négation des phrases suivantes:;

	Phrase	*Négation de la phrase*
1)	Dans le plan, les droites D et D' sont parallèles	Dans le plan, les droites D et D' sont sécantes
2)	$x \neq 1$	$x = 1$
3)	$x \in \mathbb{N}$	$x \notin \mathbb{N}$
4)	$x < 3$ ou $x > 7$	$x \geqslant 3$ et $x \leqslant 7$ $\qquad x \in [3; 7]$
5)	I et J étant deux intervalles, $x \in I \cup J$	$x \notin I \cup J$, soit $x \notin I$ et $x \notin J$.

Pour 4) et 5)
Mettre d'une couleur sur la droite réelle, les réels qui rendent vraie la proposition $x < 3$ ou $x > 7$. La partie non colorée est l'ensemble des réels qui rendent fausse la proposition.
La négation de " $x < 3$ ou $x > 7$ " est vraie pour les réels non coloriés et fausse pour ceux qui sont coloriés.



"$x < 3$ ou $x > 7$" est vraie pour les réels en rouge et fausse sinon.
"$3 \leqslant x \leqslant 7$" est fausse pour les réels en rouge et vraie sinon.

Pour 5), le même schéma peut être utilisée.

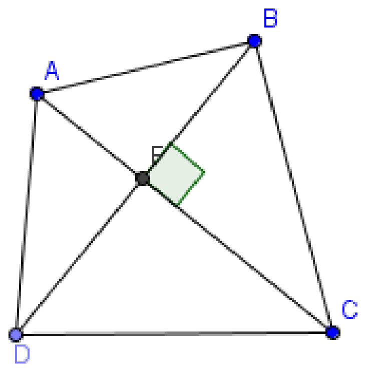
II- Implication

1- ***Définition***
Une **implication** est une phrase mathématique indiquant qu'une donnée (p) entraîne (ou implique) une

conclusion (q).
Elle s'écrit sous la forme: (p) ⇒ (q) Le symbole ⇒ se lit: « implique »
Dans les théorèmes, elle est utilisée sous la forme: si (p) alors (q)
Une implication est fausse dans le cas où (p) est vraie et (q) est fausse.
dans tous les autres cas, l'implication est vraie

2- ***Exemples***

	Implication	***Vrai ou faux***
I1	$(x = 3) \Rightarrow (x^2 = 9)$	Vrai
I2	($ABCD$ rectangle) ⇒ ($AC = BD$)	Vrai (les diagonales d'un rectangle sont égales)
I3	$[AC] \perp [BD]$ ⇒ ($ABCD$ losange)	Faux
I4	($ABCD$ carré) ⇒ ($ABCD$ losange)	Vrai (Un carré a toutes les propriétés d'un losange)
I5	(ABC triangle rectangle en A) ⇒ ($AB^2 + AC^2 = BC^2$)	Vrai (théorème de Pythagore)



Contre-exemple pour I3
($[AC] \perp [BD]$) est vrai mais ($ABCD$ losange) est faux

3- ***Vocabulaire***: ***Condition suffisante, condition nécessaire***
La condition (p) est une condition ***suffisante*** de (q)
La condition (q) est une condition ***nécessaire*** de (p)
Dans les exemples:
($x = 3$) est une condition suffisante pour que ($x^2 = 9$).
Cette condition (x=3) n'est pas nécessaire. Il existe au moins un autre réel dont le carré est 9.

Si ($x = 3$) alors, nécessairement, $x^2 = 9$

$[AC] \perp [BD]$ n'est pas une condition suffisante pour que $ABCD$ soit un losange.
On peut construire deux segments perpendiculaires sans obtenir un losange

III- Équivalence

1- ***Définition:***
Dans certains cas lorsqu'on l'implication (p) ⇒ (q) est vraie, l'implication (q) ⇒ (p) est également vraie.
On dit que les propositions (p) et (q) sont ***équivalentes***.
On note (p) ⇔ (q). Le symbole ⇔ se lit: « équivaut à »
On énonce le théorème sous la forme: (p) si et seulement si (q).
Une équivalence est vraie lorsque (p) et (q) sont vraies en même temps et lorsque (p) et (q) sont fausses en même temps.
Une équivalence est fausse lorsque l'une des conditions est vraie et l'autre fausse.

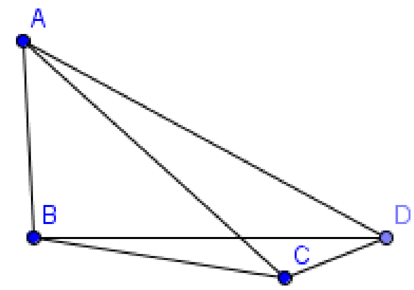
Logique et raisonnement

Résumé:

Phrase p	***Phrase q***	***(p) ⇒ (q)***	***(q) ⇒ (p)***	***(p) ⇔ (q)***
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

2- ***Vocabulaire***
(q) ⇒ (p) est la ***réciproque*** de (p) ⇒ (q)
Lorsque (p) ⇔ (q): (p) est une **condition nécessaire et suffisante** de (q)

3- ***Exemples***
Énoncer les implications réciproques de I1, I2, I3 et I4 des exemples du II-2

	Énoncé de la réciproque	***Vrai ou faux***
RI1	$(x^2 = 9) \Rightarrow (x = 3)$	Faux: $(x = -3)$ a pour carré $(x^2 = 9)$
RI2	$(AC = BD) \Rightarrow (ABCD$ rectangle)	Faux 
RI3	($ABCD$ losange) ⇒ $[AC] \perp [BD]$	Vrai
RI4	($ABCD$ losange) ⇒ ($ABCD$ carré)	Faux (un losange n'est pas nécessairement un carré)
RI5	$(AB^2 + AC^2 = BC^2) \Rightarrow$ (ABC triangle rectangle en A)	Vrai (réciproque du théorème de Pythagore)

IV- Exercices
Page 296 livre de seconde (Déclic): C- Implication et équivalence
D- Vrai ou Faux? Rôle du ***contre-exemple***

V- En pratique (Travail personnel)
Dans une démonstration pour prouver la conclusion (q), on doit vérifier la condition suffisante (p). On cherche alors à démontrer (p) pour amener la conclusion (q).

Énoncé: Dans un triangle ABC, on sait: $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 10$. I est le milieu de $[BC]$. Calculer AI.

Logique et raisonnement

Recherche (brouillon) : une construction suggère que le triangle ABC est rectangle en A et on connaît des propriétés sur la médiane issue du sommet A.
Les propriétés utiles: ***(et pour les reconnaître, il faut d'abord les connaître)***
celles qui permettent de montrer que le triangle est rectangle et celles qui permettent de calculer la longueur de $[AI]$
(P1): Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en A
(P2): Si ABC est un triangle rectangle en A alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.
Pour appliquer (P2), il faut montrer que ABC est rectangle en A
Pour appliquer (P1), il faut vérifier que $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Rédaction de la démonstration.
$AB^2 = 36$, $AC^2 = 64$ et $BC^2 = 100$
Comme $36 + 64 = 100$, on a: $AB^2 + AC^2 = BC^2$
D'après (P1): « Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en A »
on obtient la conclusion: le triangle ABC est rectangle en A.

D'après (P2): « Si ABC est un triangle rectangle en A alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse ».
on obtient la conclusion: le milieu I de $[BC]$ est le centre du cercle circonscrit à ABC

On en déduit: $AI = IB = IC = \dfrac{BC}{2}$ et comme $BC = 10$

Conclusion: $AI = 5$