Index

I- À quelle question répond-on?

- Étudier la position relative de deux courbes.
- Interpréter graphiquement le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

II- Interprétation graphique?

Soit C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle I.

Une équation de C_f est $y = f(x)$.

Soit C_g la courbe représentative d'une fonction g définie sur un intervalle I.

Une équation de C_g est $y = g(x)$.

La différence $d(x) = f(x) - g(x)$ donne la distance relative dans l'unité de l'axe des ordonnées.

Si $d(x) > 0$, la courbe C_f est strictement au-dessus de la courbe C_g.

Si $d(x) < 0$, la courbe C_f est strictement en-dessous de la courbe C_g.

Les solutions de l'équation $d(x) = 0$ donnent les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g.

Un exemple :

$\mathscr{P}$ a pour équation $y = 2x^2 - 6x + 1$ et $\mathscr{D} : y = -x + 4$

Dans la suite de l'exercice, on pose : $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$ et $g(x) = -x + 4$

Ainsi, $\mathscr{P} : y = f(x)$ et $\mathscr{D} : y = g(x)$.

Pour donner la position relative de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$, on détermine le signe de la différence :

$d(x) = 2x^2 - 6x + 1 - (-x + 4)$

Soit l'expression $d(x) = 2x^2 - 5x - 3$

On reconnaît une expression du **second degré.**

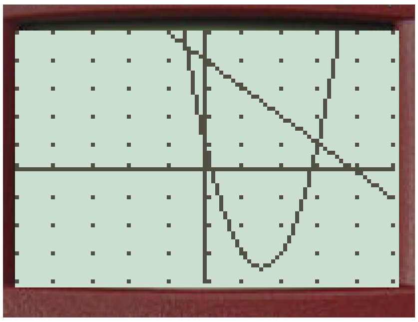
Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times2\times(-3) = 49 = 7^2$

On a donc deux racines, $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)-7}{2\times2} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)+7}{2\times2} = 3$

Comme **le coefficient 2 est strictement positif**, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		3		$+\infty$
$d(x)$		$+$	0	$-$	0		
Comparaison des ordonnées		$f(x) > g(x)$		$f(x) < g(x)$		$f(x) > g(x)$	
position relative		$\mathscr{P}$ au-dessus de $\mathscr{D}$		$\mathscr{P}$ au-dessous de $\mathscr{D}$		$\mathscr{P}$ au-dessus de $\mathscr{D}$	

Vérification graphique :



Application aux positions relatives des courbes et leurs tangentes

f est la fonction définie sur ℝ par f: $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

a) f est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u : x \mapsto 1 + e^{-x}$ dérivable sur ℝ et u ne s'annulant pas sur ℝ, donc, f est dérivable sur ℝ et $f = \dfrac{-u'}{u^2}$.

Pour tout $x \in$ ℝ, $u'(x) = -\ e^{-x}$, d'où, $f'(x) = \dfrac{-(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

Comme pour tout X réel, $e^X > 0$, $f'(x) > 0$ sur ℝ et f est strictement croissante sur ℝ.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}$ (limite de fonction composée).

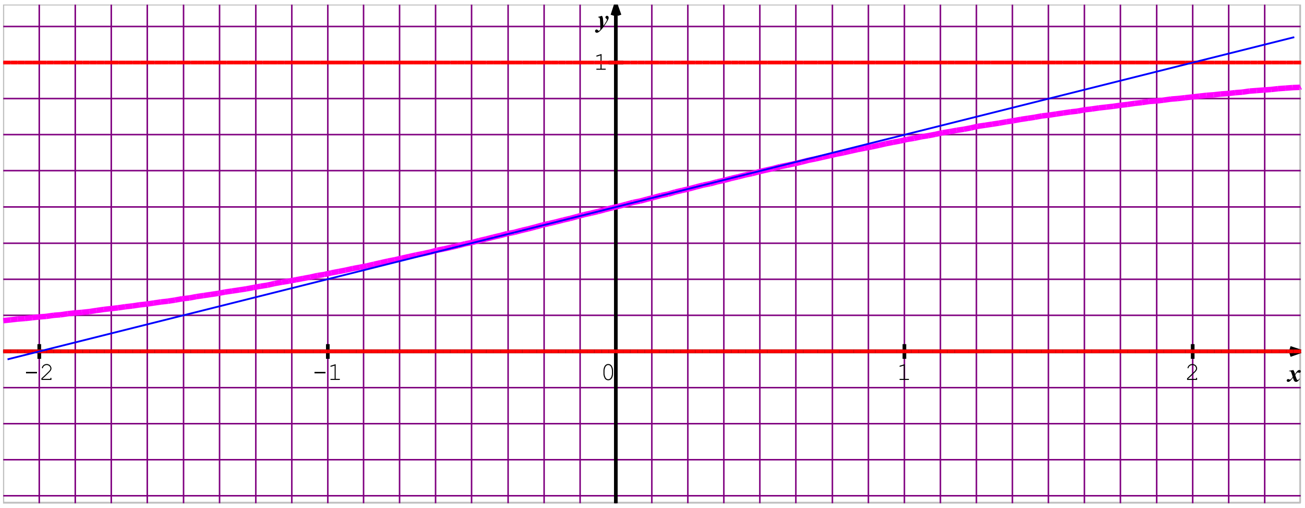
On a donc: $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+e^{-x}) = +\infty$, puis, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^{-x}} = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+e^{-x}) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^{-x}} = 1$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) Tracé



c) La fonction f' est le quotient de deux fonctions u et v définies et dérivables sur ℝ.

On a: $u : x \mapsto e^{-x}$, d'où, $u'(x) = -e^{-x}$ et $v : x \mapsto (1+e^{-x})^2$, d'où, $v'(x) = 2\times(-e^{-x})\times(1+e^{-x})$

$$f''(x) = \frac{-e^{-x}(1+e^{-x})^2 - 2\times(-e^{-x})(1+e^{-x})\times e^{-x}}{(1+e^{-x})^4}$$ **Remarquer**: Factorisation de ....

$$f''(x) = \frac{e^{-x}(1+e^{-x})(-(1+e^{-x})+2e^{-x})}{(1+e^{-x})^4} = \frac{e^{-x}(-1+e^{-x})}{(1+e^{-x})^3}$$

Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $(-1+e^{-x})$

Or, $e^{-x} > 1 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ....

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	–	
$f'(x)$		↗	$\frac{1}{4}$	↘	

f' étant croissante sur ℝ⁻, on a: Pour $x \leqslant 0$, on a: $f'(x) \leqslant f'(0)$

f' étant décroissante sur ℝ⁺, on a: Pour $x \geqslant 0$, on a: $f'(x) \leqslant f'(0)$

Conclusion: $f'(0) = \frac{1}{4}$ est le maximum de f' atteint en 0.

d) Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ en 0 est: $y = \frac{1}{4}(x-0) + f(0) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$, on étudie **le signe** de $d(x) = f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$

Une méthode possible est d'étudier la variation de d **puisqu'on sait que** $\boldsymbol{d(0) = 0}$

$d'(x) = f'(x) - \frac{1}{4}$, d'où, $d'(x) \leqslant 0$ d'après la question c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$d''(x) = f''(x)$		+	0	–	
$d'(x)$		–		–	
$d(x)$			0		
Signe de $d(x)$		+		–	
Position relative de $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{T}$.		$\mathscr{C}$ au-dessus de $\mathscr{T}$	Point de tangence	$\mathscr{C}$ au-dessous de $\mathscr{T}$	

Application aux positions relatives des courbes et leurs asymptotes

Énoncé :

On se propose d'étudier les branches infinies (*c-à-d: existence ou non d'asymptotes, comportement asymptotique*) de C_f, courbe représentative de la fonction: $f : x \mapsto \sqrt{x^2-3x+1}$

1) Étudier l'ensemble de définition de f et montrer que: $f(x) = \sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}$. En déduire que C_f admet un axe de symétrie.

2) Montrer que la droite d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote à C_f en $+\infty$ et étudier la position de C_f par rapport à cette droite.

3) À l'aide de la question 1), étudier la branche infinie de C_f en $-\infty$

Corrigé :

$f : x \mapsto \sqrt{x^2-3x+1}$

1) x, étant un réel, a une image par f si et seulement si $x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$

Calcul du discriminant: $\Delta = \ldots = 5$

Comme $\Delta > 0$, $x^2 - 3x + 1$ possède deux racines et est positif lorsque $x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

L'ensemble de définition de f est une ***réunion*** d'intervalles: $D_f = \left]-\infty ; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$.

Forme canonique : $x^2-3x+1 = (x-\frac{3}{2})^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = (x-\frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4} = \left[(x-\frac{3}{2})+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[(x-\frac{3}{2})-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

Pour tout x de cet ensemble: $f(x)=\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}$.

Axe de symétrie: Montrons que la droite d'équation $x=\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de C_f

Soit $x\in D_f$, alors, $x\leq\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $x\geq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

On a donc: $3-x\geq 3-\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $3-x\leq 3-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

On obtient: $3-x\geq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $3-x\leq\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, ce qui prouve $3-x\in D_f$

et, $f(3-x)=\sqrt{(3-x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}=\sqrt{(\frac{3}{2}-x)^2-\frac{5}{4}}=f(x)$

Autre méthode *: Soit h tel que* $\frac{3}{2}-h\in D_f$

On a alors $h\geq\frac{\sqrt{5}}{2}$ *ou* $h\leq\frac{-\sqrt{5}}{2}$ *, et, par conséquent* $\frac{3}{2}+h\in D_f$

D'autre part: $f(\frac{3}{2}-h)=\sqrt{(-h)^2-\frac{5}{4}}$ *et* $f(\frac{3}{2}+h)=\sqrt{h^2-\frac{5}{4}}$ *, ce qui prouve l'égalité)*

Par conséquent, la courbe C_f admet la droite d'équation $x=\frac{3}{2}$ pour axe de symétrie.

2) **Étudions** la limite de $f(x)-(x-\frac{3}{2})$ en $+\infty$

$$\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}-(x-\frac{3}{2})=\frac{(\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}-(x-\frac{3}{2}))(\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}+(x-\frac{3}{2}))}{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}+(x-\frac{3}{2})}=\frac{\frac{-5}{4}}{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}}+(x-\frac{3}{2})}$$

En $+\infty$, le dénominateur tend vers $+\infty$, d'où, $\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$

Ce qui prouve que la droite D_1 d'équation $y=x-\frac{3}{2}$ est asymptote à C_f et comme la différence $f(x)-(x-\frac{3}{2})$ est strictement négative d'après le calcul précédent, C_f est strictement en-dessous de cette asymptote.

3) Au 1), on a prouvé que C_f était symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\frac{3}{2}$.

Par symétrie, il existe une droite D_2 symétrique de D_1 asymptote à C_f en $-\infty$.

(*Faire un schéma pour soutenir le raisonnement)*

Recherche d'une équation de D_2 ***:***

Soit *M* d'abscisse *x* sur D_1 . Ce point *M* a pour coordonnées $\left(x\,;x-\frac{3}{2}\right)$

Le point *M′* symétrique de *M* par rapport à la droite d'équation $x=\frac{3}{2}$ a pour coordonnées $x'=3-x$ et $y'=x-\frac{3}{2}$.

Il reste à "éliminer" *x* pour trouver une relation entre les coordonnées *x′* et *y′* de *M′*, ce qui fournira une équation de D_2

De $x'=3-x$, on tire $x=3-x'$ et en substituant dans l'égalité $y'=x-\frac{3}{2}=3-x'-\frac{3}{2}=-x'+\frac{3}{2}$.

Une équation de D_2 est: $y=-x+\frac{3}{2}$