

Index

[Les fonctions de référence.....](#)1
[Les fonctions composées.....](#)2
[Primitives et intégrales.....](#)2
[Intégration par parties.....](#)3

Les fonctions de référence

Dans ce tableau n'apparaissent que les images de la fonction...

Par défaut la variable est x , mais, ne pas oublier que ce n'est pas le nom de la variable qui est important.

Les fonctions sont continues et dérivables sur un intervalle

Nom	fonction f	fonction dérivée f'		fonction f	primitive F
constante	k	0		0	k
affine	$ax + b$	a		a	$ax + b$
puissance (*)	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$		x^α	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
Inverse (*)	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$		$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$
Racine carrée (*)	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$		$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
Puissance négative (*)	$\frac{1}{x^\alpha}$	$\frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$		$\frac{1}{x^\alpha}$	$\frac{-1}{\alpha-1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} + C$
Logarithme népérien	$\ln x$	$\frac{1}{x}$		$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
Exponentielle	e^x	e^x		e^x	$e^x + C$
sinus	$\sin x$	$\cos x$		$\cos x$	$\sin x + C$
cosinus	$\cos x$	$-\sin x$		$\sin x$	$-\cos x + C$

(*) Toutes les formules concernant les puissances (positives, négatives, fractionnaires ...) peuvent se résumer en une seule SAUF lorsque la puissance est -1 (fonction inverse).

Les primitives de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$.

Exemples: Tous ces calculs sont valides sur un intervalle où la fonction est continue

Une primitive de $x \mapsto x^5$ est $x \mapsto \frac{1}{6} x^6$.

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^5} = x^{-5}$ est $x \mapsto \frac{1}{-5+1} x^{-5+1} = \frac{-1}{4} \frac{1}{x^4}$

Une primitive de $x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$ est $x \mapsto \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{1/2+1} = \frac{2}{3} x^{3/2} = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$

Synthèse: Primitives

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ est $x \mapsto \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-1/2+1} = 2 x^{1/2} = 2 \sqrt{x}$

Une primitive de $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x}} = x^{2-\frac{1}{2}} = x^{3/2}$ est $x \mapsto \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} = \frac{2}{5} x^{5/2} = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x}$

....

Les fonctions composées

u est une fonction (et non un réel) dérivable sur un intervalle telle que la fonction composée du type $f \circ u$ est dérivable sur cet intervalle et, où, f est une des fonctions de référence.

Dans ce tableau n'apparaissent que les fonctions. (Les images n'apparaissent pas.)

Pour utiliser ce tableau, il faut donc reconnaître f , u et u' .

Une primitive sera donc $F \circ u$, lorsqu'on aura mis en évidence $u' \times (f \circ u)$ où la dérivée de F est $F' = f$.

Formes de la fonction dont on cherche une primitive	Primitive (à une constante additive près)
$u' \cdot u^\alpha$ ($\alpha \neq -1$)	$\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$ et $u > 0$	$2 \sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$ et $u > 0$	$\ln \circ u$
$u' e^u$	e^u
$u' \cos u$	$\sin u$
$u' \sin u$	$-\cos u$

Exemples:

1) Soit la fonction $g: x \mapsto 2x \cos(x^2)$

On reconnaît la fonction $u: x \mapsto x^2$ et sa dérivée $u': x \mapsto 2x$.

Une primitive est donc: $x \mapsto \sin(x^2)$

($g = u' (f \circ u)$ avec $f = \cos$)

2) Soit la fonction $h: x \mapsto \sin x \times \cos^2 x$

On reconnaît la fonction $u: x \mapsto \cos x$ et sa dérivée $u': x \mapsto -\sin x$

Une primitive est donc: $x \mapsto -\frac{1}{3} \cos^3 x$

($g = -u' (f \circ u)$ avec $f = \text{"carré"}$)

Primitives et intégrales

Si f est une fonction continue sur un intervalle I .

Soit un réel $a \in I$.

Synthèse: Primitives

La primitive de f sur I qui s'annule en a est la fonction $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Il en découle : pour tout a de I et tout b de I , $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Intégration par parties

Lorsque u et v sont dérivables sur un intervalle I et que leurs dérivées u' et v' sont continues:

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Cette formule découle des propriétés des opérations et dérivées.

Rappels sur ces opérations:

$(u + v)' = u' + v'$
k constante réelle, $(ku)' = ku'$
$(uv)' = u'v + v'u$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Ce qui amène le tableau équivalent pour les primitives :

u et v sont des fonctions continues sur un intervalle I et U, V leurs primitives sur I .

Fonction	Primitive	Commentaires
$u + v$	$U + V$	Voir aussi linéarité de l'intégrale
k constante réelle, ku	kU	Voir aussi linéarité de l'intégrale
$uV + vU$	UV	Voir intégration par parties
$\frac{uV - vU}{V^2}$	$\frac{U}{V}$	

"J'ai toujours pensé qu'il n'avait pas assez d'imagination pour devenir mathématicien !" **Hilbert, David**

au sujet d'un étudiant qui a renoncé aux mathématiques pour la poésie