Table des matières

Objectif:

Comparaison de trois méthodes pour étudier les expressions de la forme $z' = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ où $z \neq z_B$

Dans toute l'activité, on se place dans le plan complexe. z est l'affixe de M, z' est celle de M'.

On pose $z' = \dfrac{z-1+2\mathrm{i}}{z+2-\mathrm{i}}$

I- Méthode géométrique

1) Déterminer les affixes z_A et z_B des points A et B tels que $z' = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$.

$z_A = 1 - 2\mathrm{i}$ et $z_B = -2 + \mathrm{i}$

Placer A et B dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (Voir figure définitive)

2) Soit $M(z)$.

Interpréter géométriquement, $|z'|$ et arg (z').

$|z'| = \left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right| = \dfrac{|z-z_A|}{|z-z_B|} = \dfrac{AM}{BM}$. Ne pas oublier: $|z'| = OM'$

$\arg(z') = \arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \arg(z-z_A) - \arg(z-z_B) = (\vec{u},\overrightarrow{AM}) - (\vec{u},\overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})\ [2\pi]$

Ne pas oublier: $\arg(z') = (\vec{u},\overrightarrow{OM'})\ [2\pi]$

3) Recherche d'ensembles

a) Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que M' appartient à l'axe des réels.

$M' \in (O, \vec{u})$ si et seulement si $M' \neq B$ et ($M' = O$ ou $(\vec{u},\overrightarrow{OM'}) = 0\ [\pi]$)

$M' \in (O, \vec{u})$ si et seulement si $M' \neq B$ et ($z' = O$ ou $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}) = 0\ [\pi]$)

$M' \in (O, \vec{u})$ si et seulement si $M' \neq B$ et ($z = z_A$ ou les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires)

$M' \in (O, \vec{u})$ si et seulement si $M' \neq B$ et ($M = A$ ou les points A, B, M sont alignés).

Conclusion: L'ensemble E est la droite (AB) privée de B.

b) Déterminer l'ensemble F des points $M(z)$ tels que M' appartient à l'axe des imaginaires purs.

$M' \in (O, \vec{v})$ si et seulement si $M' \neq B$ et ($M' = O$ ou $(\vec{u},\overrightarrow{OM'}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$)

$M' \in (O, \vec{v})$ si et seulement si $M' \neq B$ et ($z' = O$ ou $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$)

$M' \in (O, \vec{v})$ si et seulement si $M' \neq B$ et ($z = z_A$ ou les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux)

$M' \in (O, \vec{v})$ si et seulement si $M' \neq B$ et ($M = A$ ou le triangle ABM est rectangle en M).

Conclusion: L'ensemble F est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B.

c) Déterminer l'ensemble G des points $M(z)$ tels que M' appartient au cercle unitaire: $\mathscr{C}(O; 1)$.

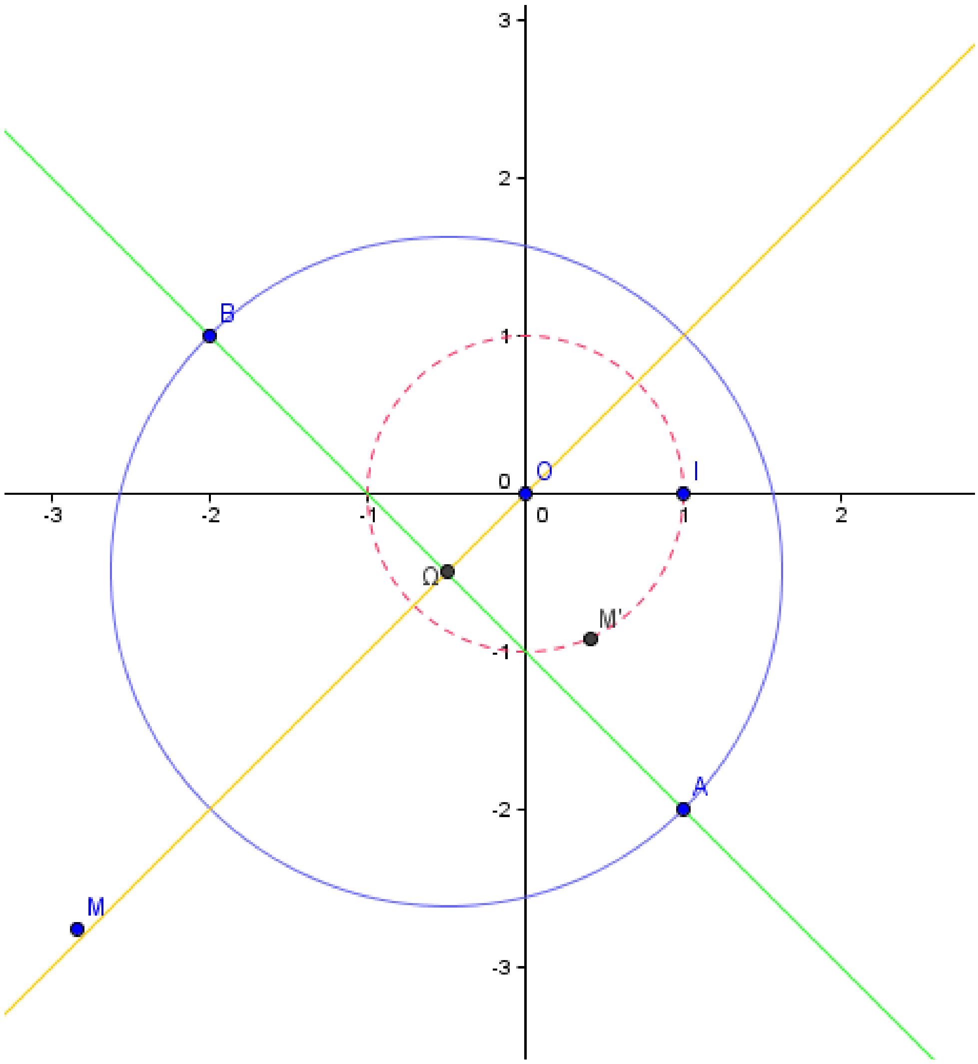
$M' \in \mathscr{C}(O; 1)$ si et seulement si $M' \neq B$ et $OM' = 1$

$M' \in \mathscr{C}(O; 1)$ si et seulement si $M' \neq B$ et $\dfrac{AM}{BM} = 1$

$M' \in \mathscr{C}(O; 1)$ si et seulement si $M' \neq B$ et $AM = BM$

Conclusion: L'ensemble G est la médiatrice du segment $[AB]$.

d) Construire ces trois ensembles.



II- Méthode algébrique

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer la partie réelle x' et la partie imaginaire y' de z'.

$$z' = x' + \mathrm{i}y' = \frac{x+\mathrm{i}\,y-1+2\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}\,y+2-\mathrm{i}} = \frac{x-1+\mathrm{i}(2+y)}{x+2+\mathrm{i}(y-1)} = \frac{(x-1+\mathrm{i}(2+y))\times(x+2-\mathrm{i}(y-1))}{(x+2)^2+(y-1)^2}$$

$$z' = x' + \mathrm{i}y' = \frac{(x-1)(x+2)+(y+2)(y-1)}{(x+2)^2+(y-1)^2} + \mathrm{i}\,\frac{(x+2)(y+2)-(x-1)(y-1)}{(x+2)^2+(y-1)^2}$$

On a donc: $x' = \dfrac{(x-1)(x+2)+(y+2)(y-1)}{(x+2)^2+(y-1)^2} = \dfrac{x^2+x+y^2+y-4}{(x+2)^2+(y-1)^2}$

et $y' = \dfrac{(x+2)(y+2)-(x-1)(y-1)}{(x+2)^2+(y-1)^2} = \dfrac{3x+3y+3}{(x+2)^2+(y-1)^2}$

2) Recherche d'ensembles

a) Déterminer une équation de l'ensemble E_1 des points $M(z)$ tels que z' est un réel.

z' est un réel si et seulement si $z' \neq z_B$ et $y' = 0$

z' est un réel si et seulement si $z' \neq z_B$ et $\dfrac{3x+3y+3}{(x+2)^2+(y-1)^2} = 0$

z' est un réel si et seulement si $(x; y) \neq (-2; 1)$ et $3x + 3y + 3 = 0$

Conclusion: l'ensemble E_1 est la droite d'équation $3x + 3y + 3 = 0$ (ou $y = -x - 1$) privée du point $B(-2; 1)$

b) Déterminer une équation de l'ensemble F_1 des points $M(z)$ tels que z' est un imaginaire pur.

z' est un réel si et seulement si $z' \neq z_B$ et $x' = 0$

z' est un réel si et seulement si $z' \neq z_B$ et $\dfrac{x^2+x+y^2+y-4}{(x+2)^2+(y-1)^2} = 0$

z' est un réel si et seulement si $(x; y) \neq (-2; 1)$ et $x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$

z' est un réel si et seulement si $(x; y) \neq (-2; 1)$ et $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{18}{4}$

Conclusion: l'ensemble F_1 est le cercle d'équation $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{18}{4}$ privé du point $B(-2; 1)$

c) Déterminer une équation de l'ensemble G_1 des points $M(z)$ tels que $|z'| = 1$.

$|z'| = 1$ si et seulement si $z' \neq z_B$ et $|(x-1+\mathrm{i}(y+2))| = |(x+2)+\mathrm{i}(y-1)|$

$|z'| = 1$ si et seulement si $(x; y) \neq (-2; 1)$ et $(x-1)^2 + (y+2)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2$

$|z'| = 1$ si et seulement si $(x; y) \neq (-2; 1)$ et $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$

$|z'| = 1$ si et seulement si $(x; y) \neq (-2; 1)$ et $6x - 6y = 0$

Conclusion: l'ensemble G_1 est la droite d'équation $x - y = 0$ (ou $y = x$) .

d) Construire ces trois ensembles.

On retrouve les ensembles E, F, G du I-

III- Avec les conjugués

1) Écrire $\overline{z'}$ en fonction de z et/ou $\overline{z}$.

$$\overline{z'} = \overline{\left(\frac{z-1+2\mathrm{i}}{z+2-\mathrm{i}}\right)} = \frac{\overline{z-1+2\mathrm{i}}}{\overline{z+2-\mathrm{i}}} = \frac{\overline{z}-1-2\mathrm{i}}{\overline{z}+2+\mathrm{i}}$$

2) Recherche d'ensembles

a) Déterminer l'ensemble E_2 des points $M(z)$ tels que $z' = \overline{z'}$.

$z' = \overline{z'}$ si et seulement si $\dfrac{z-1+2\mathrm{i}}{z+2-\mathrm{i}} = \dfrac{\overline{z}-1-2\mathrm{i}}{\overline{z}+2+\mathrm{i}}$

$z' = \overline{z'}$ si et seulement si $z \neq -2 + \mathrm{i}$ et $(z - 1 + 2\mathrm{i})(\overline{z} + 2 + \mathrm{i}) = (z + 2 - \mathrm{i})(\overline{z} - 1 - 2\mathrm{i})$

$z' = \overline{z'}$ si et seulement si $z \neq -2 + \mathrm{i}$

et $z\overline{z} + 2z + \mathrm{i}z - \overline{z} - 2 - \mathrm{i} + 2\mathrm{i}\overline{z} + 4\mathrm{i} - 2 = z\overline{z} + 2\overline{z} - \mathrm{i}\overline{z} - z - 2 + \mathrm{i} - 2\mathrm{i}z - 4\mathrm{i} - 2$

$z' = \overline{z'}$ si et seulement si $z \neq -2 + \mathrm{i}$ et $3(z - \overline{z}) + 3\mathrm{i}(z + \overline{z}) + 6\mathrm{i} = 0$

Or, $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}y$ et $z + \overline{z} = 2x$, d'où,

$z' = \overline{z'}$ si et seulement si $z \neq -2 + \mathrm{i}$ et $6\mathrm{i}y + 6\mathrm{i}x + 6\mathrm{i} = 0$

$z' = \overline{z'}$ si et seulement si $z \neq -2 + \mathrm{i}$ et $y + x + 1 = 0$

l'ensemble E_2 des points $M(z)$ tels que $z' = \overline{z'}$ est la droite d'équation $y = -x - 1$ privée de B.

b) Déterminer l'ensemble F_2 des points $M(z)$ tels que $z' + \overline{z'} = 0$.

$z' + \overline{z'} = 0$ si et seulement si $\dfrac{z-1+2\mathrm{i}}{z+2-\mathrm{i}} + \dfrac{\overline{z}-1-2\mathrm{i}}{\overline{z}+2+\mathrm{i}} = 0$

$z' + \overline{z'} = 0$ si et seulement si $\dfrac{z-1+2\mathrm{i}}{z+2-\mathrm{i}} = -\dfrac{\overline{z}-1-2\mathrm{i}}{\overline{z}+2+\mathrm{i}}$

Les calculs précédents mènent à:

$z' + \overline{z'} = 0$ si et seulement si $z \neq -2 + \mathrm{i}$

et $z\overline{z} + 2z + \mathrm{i}z - \overline{z} - 2 - \mathrm{i} + 2\mathrm{i}\overline{z} + 4\mathrm{i} - 2 = -(z\overline{z} + 2\overline{z} - \mathrm{i}\overline{z} - z - 2 + \mathrm{i} - 2\mathrm{i}z - 4\mathrm{i} - 2)$

$z' + \overline{z'} = 0$ si et seulement si $z \neq -2 + \mathrm{i}$ et $2z\overline{z} + (z + \overline{z}) - \mathrm{i}(z - \overline{z}) - 8 = 0$

Or, $z\overline{z} = x^2 + y^2$, $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}y$ et $z + \overline{z} = 2x$, d'où,

$z' + \overline{z'} = 0$ si et seulement si $z \neq -2 + \mathrm{i}$ et $2(x^2 + y^2) + 2x + 2y - 8 = 0$

$z' + \overline{z'} = 0$ si et seulement si $z \neq -2 + \mathrm{i}$ et $x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$ (Voir II- 2-b) ensemble F_1)

Conclusion: l'ensemble F_2 est le cercle d'équation $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{18}{4}$ privé du point $B(-2; 1)$

c) Déterminer l'ensemble G_2 des points $M(z)$ tels que $z' \times \overline{z'} = 1$

$z' \times \overline{z'} = 1$ si et seulement si $\dfrac{z-1+2\mathrm{i}}{z+2-\mathrm{i}} \times \dfrac{\bar{z}-1-2\mathrm{i}}{\bar{z}+2+\mathrm{i}} = 1$

$z' \times \overline{z'} = 1$ si et seulement si $z \neq -2 + \mathrm{i}$ et $(z - 1 + 2\mathrm{i})(\bar{z} - 1 - 2\mathrm{i}) = (z + 2 - \mathrm{i})(\bar{z} + 2 + \mathrm{i})$

$z' \times \overline{z'} = 1$ si et seulement si $z \neq -2 + \mathrm{i}$

et $z\bar{z} - z - 2\mathrm{i}z - \bar{z} + 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}\bar{z} - 2\mathrm{i} + 4 = z\bar{z} + 2z\ \mathrm{i}z + 2\bar{z} + 4 + 2\mathrm{i} - \mathrm{i}\bar{z} - 2\mathrm{i} + 1$

$z' \times \overline{z'} = 1$ si et seulement si $z \neq -2 + \mathrm{i}$ et $-3(z + \bar{z}) - 3\mathrm{i}(z - \bar{z}) = 0$

Or, $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}y$ et $z + \bar{z} = 2x$, d'où,

$z' \times \overline{z'} = 1$ si et seulement si $z \neq -2 + \mathrm{i}$ et $x - y = 0$

Conclusion: l'ensemble G_2 est la droite d'équation $x - y = 0$ (ou $y = x$) .

d) Construire ces trois ensembles.

On retrouve les ensembles *E*, *F*, *G* du I-

IV- Bilan

À faire par vous-mêmes.