

Index

Préliminaires:.....	1
I- Vers le raisonnement par récurrence.....	1
1) Formule explicite: un en fonction de n.....	1
2) Formule par récurrence: un+1 en fonction des termes précédents.....	1
3) Conjecturer une égalité.....	1
4) Hérité.....	1
II- A propos de conjecture.....	2
III- A propos de l'hérité.....	2
IV- Énoncé de l'axiome de récurrence:	2
Un exemple de rédaction:.....	2
V- Applications.....	3
Un texte pour réfléchir sur ce que signifie "démontrer":	3

Préliminaires:

- *** Que signifie pour vous le terme de *conjecture*?
- *** Comment démontrer une *implication*: « **SI** (proposition P) **ALORS** (proposition Q) »?
- *** Qu'est-ce qu'une *proposition*?
- *** Écrire une proposition mathématique toujours vraie.
- *** Écrire une proposition mathématique toujours fausse.
- *** Écrire une proposition mathématique vraie sur l'intervalle réel [1;5] et fausse sinon.

I- Vers le raisonnement par récurrence

n étant un entier supérieur ou égal à 1, on pose: $u_1 = \frac{1}{1 \times 2}$, $u_2 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3}$, $u_3 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4}$. On poursuit ainsi la construction des termes u_n .

1) Formule explicite: u_n en fonction de n

Écrire u_n en fonction de n . (C'est la définition du terme noté u_n)

Remarque: On peut utiliser le symbole Σ (sigma majuscule) signifiant somme: $u_n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i \times (i+1)}$

2) Formule par récurrence: un+1 en fonction des termes précédents

Écrire u_{n+1} en fonction de u_n et de n

3) Conjecturer une égalité

Mettre sous forme de fraction irréductible les termes u_1 , u_2 , u_3 , u_4

Conjecturer une écriture plus simple de u_n (Ce résultat n'est pas certain).

4) Hérité

Soit k **un** entier supérieur ou égal à 1.

En utilisant le 2), montrer que: « **Si** $u_k = \frac{k}{k+1}$ **alors** $u_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$ »

II- A propos de conjecture

On veut comparer n^3 et 2^n à partir de $n=2$

Classer les deux nombres pour $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=5$.

Quelle conjecture faites-vous sur le classement de n^3 et 2^n ?

III- A propos de l'hérédité.

On fait la supposition suivante: Soit k un entier, le nombre $7^k + 1$ est divisible par 6

(Autrement dit: on peut écrire que $7^k + 1 = 6q$ avec q entier).

Montrer que l'on peut en déduire: $7^{k+1} + 1$ est un multiple de 6.

Rappel: $7^{k+1} = 7 \times 7^k$

IV- Énoncé de l'axiome de récurrence:

P_n est une phrase (proposition) relative à un entier n

Dans I-, P_n est l'égalité « $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour $n \geq 1$ »

Dans II-, P_n est l'inégalité « $n^3 \geq 2^n$ pour $n \geq 2$ »

Dans III-, P_n est la phrase: « $7^n + 1$ est divisible par 6 »

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on doit:

1^{ère} étape: « initialisation »

Démontrer que la propriété est vraie pour le premier entier n_0

2^{ème} étape: « caractère héréditaire » Soit k un entier naturel supérieur ou égal à n_0

Démontrer que « P_k implique P_{k+1} »

ou encore « Si $P(k)$ est vraie pour un entier $k \geq n_0$ (hypothèse de récurrence), alors $P(k+1)$ est vraie »)

3^{ème} étape: Conclusion

D'après l'axiome de récurrence, on conclut alors que pour tout entier n de \mathbb{N} tel que $n \geq n_0$ la propriété $P(n)$ est vraie.

Un exemple de rédaction:

Énoncé: La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$

Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 3 - 2^n$

Démonstration:

Appelons P_n l'égalité $u_n = 3 - 2^n$

* **Initialisation:** $u_0 = 2$ et $3 - 2^0 = 3 - 1 = 2$. L'égalité est vérifiée au rang $n=0$. (ou P_0 est vraie)

** **Caractère héréditaire**

Supposons que pour un entier naturel k , on a: $u_k = 3 - 2^k$ (Hypothèse de récurrence P_k)

Par définition de la suite (u_n) , $u_{k+1} = 2u_k - 3$

d'où, $u_{k+1} = 2(3 - 2^k) - 3$ d'après l'hypothèse de récurrence

On en déduit: $u_{k+1} = 6 - 2^{k+1} - 3 = 3 - 2^{k+1}$ (P_{k+1} est établie)

On a montré: Si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie

*** **Conclusion**

D'après l'axiome de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n .

"J'ai toujours pensé qu'il n'avait pas assez d'imagination pour devenir mathématicien !" **Hilbert, David**

au sujet d'un étudiant qui a renoncé aux mathématiques pour la poésie

V- Applications

Dans I-, l'égalité « $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour $n \geq 1$ » est-elle vraie?

Dans II-, l'inégalité « $n^3 \geq 2^n$ pour $n \geq 2$ » est-elle vraie?

Dans III-, la phrase: « $7^n + 1$ est divisible par 6 » est-elle vraie?

Un texte pour réfléchir sur ce que signifie "démontrer":

Extraits de l'article AXIOMATIQUE in encyclopédie universalis.

La méthode axiomatique est un mode d'exposition des sciences exactes fondé sur des propositions admises sans démonstration et nettement formulées et des raisonnements rigoureux. [...]

L'axiomatique commence par un inventaire exhaustif de toutes les propositions que l'on admet sans démonstration et qui ne sont pas des définitions ; ces propositions, appelées *axiomes*, ou parfois postulats, constitueront le point de départ de la théorie que l'on se propose d'édifier. Parmi les axiomes d'une théorie figurent des *règles de déduction* (appelées aussi *axiomes de la logique*) qui sont communes à toutes les sciences déductives. À partir de ces données, on s'astreint à démontrer les autres résultats, ou *théorèmes*, de la théorie considérée, en proscrivant toute affirmation non issue des axiomes ; en particulier, tout recours à l'expérience sensible ou au sentiment subjectif est à rejeter.[...]

On doit à G. Peano (1858-1932) et à R. Dedekind (1831-1916) un exposé axiomatique de la théorie des nombres entiers ; désirant caractériser axiomatiquement l'ensemble \mathbf{N}^* des nombres entiers strictement positifs, Peano prend comme concept primitif la fonction S qui, à tout entier, associe son successeur (ainsi $S(n) = n + 1$). Cette axiomatique choisit quatre signes de base \mathbf{N}^* , S, 1 et =, satisfaisant aux propriétés suivantes (nous énonçons ici les cinq axiomes dans le langage mathématique employé de nos jours ; la formulation originale était exprimée en symboles logiques) :

1. \mathbf{N}^* est un ensemble ;
2. 1 appartient à \mathbf{N}^* ;
3. S est une application injective de \mathbf{N}^* dans \mathbf{N}^* ;
4. 1 n'est le successeur d'aucun nombre ;
5. Tout sous-ensemble A de \mathbf{N}^* qui contient 1 et qui contient son image S(A) par S est égal à \mathbf{N}^* tout entier.

L'axiome 5 joue un rôle fondamental : c'est lui qui légitime le raisonnement par récurrence. À partir des cinq axiomes précédents, on définit les opérations de l'arithmétique ; ainsi les signes +, \times , < ne sont pas des signes de base de la théorie ; des relations telles que $a + b = b + a$, ou $a + b \geq a$ sont des théorèmes de l'axiomatique de Peano et se démontrent à partir des axiomes.