Table des matières

I- Préliminaire:

Faire des maths:

ce n'est pas appliquer un livre de recettes.

Les techniques, les méthodes

Les techniques, les méthodes à utiliser s'appuient toujours sur des connaissances de bases ....

et s'appliquent **sous conditions** ...

c'est-à-dire:

avant d'appliquer une technique, une méthode, on doit s'assurer qu'on est bien dans le cadre où cette technique, cette méthode s'appliquent.

Les propriétés, les théorèmes

Les propriétés, les théorèmes s'énoncent sous la forme: Si (hypothèses) alors (conclusion)

On cherche à appliquer une propriété pour montrer la conclusion (la phrase qui suit "alors")

Pour cela, on est amené à prouver les hypothèses de la propriété.

Exemples:

Propriété: Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Pour appliquer ce théorème, on prouve qu'un certain triangle est un triangle rectangle et ensuite, on peut calculer la longueur d'un des côtés connaissant les deux autres.

II- Relations d'ordre et les outils algébriques

II-1- Les symboles- le vocabulaire

Symbole	se lit	Vocabulaire
$<$		strictement inférieur à
$>$		strictement supérieur à
$\leqslant$		inférieur ou égal à
$\geqslant$		supérieur ou égal à

Symbole	se lit	Vocabulaire
$x < 0$		strictement négatif
$x > 0$		strictement positif
$x \leqslant 0$		négatif ou nul
$x \geqslant 0$		positif ou nul

II-2- Définitions

1) Dire que $a < b$ (ou $b > a$) équivaut à $b - a$ est un réel strictement positif.

2) Dire que $a \leqslant b$ (ou $b \geqslant a$) équivaut à $b - a$ est un réel positif ou nul.

On a : $a < b$ si et seulement si $b - a > 0$

$a \leqslant b$ si et seulement si $b - a \geqslant 0$

Une méthode pour comparer:

Pour comparer deux nombres ou deux expressions numériques, on forme leur différence et on étudie le signe de cette différence.

II-3- Propriété (transitivité de la relation d'ordre)

Si $a < b$ et $b < c$ alors, $a < c$.

II-4- Opérations et inégalités

a, b, c et d sont des nombres réels.

II-4-1- Inégalités et sommes

II-4-1-1- Ajout d'un terme

On ne change pas une inégalité en ajoutant ou en retranchant un même nombre réel aux deux membres de l'inégalité.

ou encore:

Pour tout réel c, si $a < b$ alors $a + c < b + c$.

II-4-1-2- Somme d'inégalités

En **ajoutant** membre à membre des inégalités de **même sens**, on obtient une inégalité de même sens.

ou encore:

Si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$

II-4-2- Inégalités et produits

II-4-2-1- Facteur positif

On ne change pas une inégalité en multipliant par un même nombre réel **strictement positif** les deux membres de l'inégalité.

ou encore:

Si $a < b$ et si $\mathbf{c > 0}$,alors $a \times c < b \times c$.

II-4-2-2- Facteur négatif

On **change** l'inégalité en multipliant par un même nombre réel **strictement négatif** les deux membres de l'inégalité.
ou encore:
Si $a < b$ et si $\mathbf{c < 0}$,alors $a \times c > b \times c$.

II-4-2-3- Produit d'inégalités

En **multipliant** membre à membre des inégalités de **nombres positifs** et de **même sens**, on obtient une inégalité de même sens.
ou encore:
Si $0 < a < b$ et $0 < c < d$ alors $a \times c < b \times d$

II-4-3- Inégalités et inverses

On **change** l'inégalité en prenant l'**inverse** des deux membres **strictement positifs** d'une inégalité.
ou encore:
Si 0 < *a* < *b*,alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

II-4-4- Attention! Danger!

Les propriétés des § II-4-1-2 Somme d'inégalités et II-4-2-3- Produit d'inégalités ne peuvent pas être appliquées pour des différences, des produits lorsqu'un facteur est négatif et des quotients.

III-Bilan :

Avant d'opérer sur les inégalités, on les met dans le même ordre.

On écrit les différences $X - Y$ et $X - Z$ sous la forme $X + (-Y)$ et $X + (-Z)$, et, on classe $-Y$ et $-Z$.

On écrit les quotients $\frac{X}{y}$ et $\frac{X}{Z}$ sous la forme $X \times \frac{1}{Y}$ et $X \times \frac{1}{Z}$

On reconnaît une somme : l'ordre est conservé.

On reconnaît un produit : on cherche le signe de chaque facteur

IV- Les démonstrations

Preuve du II-3-: (Transitivité)

Données: On sait: $a < b$ et $b < c$

Conséquences directes de ces données:

d'où $b - a > 0$ et $c - b > 0$

Pour obtenir la conclusion, on doit déterminer le signe de c – a.

Or, $c - a = (c - b) + (b - a)$.

La somme de deux nombres strictement positifs est strictement positive, d'où, $c - a > 0$

Conclusion: $a < c$

***Preuve du* II-4-1- : Ajout d'un terme**
$(b+ c) - (a + c) = b - a$
Ces deux différences ayant le même signe, les nombres sont dans le même ordre.

***Preuve du* II-4-1-2- : Somme d'inégalités**
Comme $a < b$, d'après la propriété précédente II-4-1-1: $a + c < b + c$. (1)

Comme $c < d$, d'après la propriété précédente II-4-1-1: $b + c < b + d$. (2)
Par comparaison de (1) et (2), il vient d'après la propriété II-3-(transitivité) : $a + c < b + d$

Preuve des II-4-2-1- et II-4-2-2- : **Produit par un facteur**
$(b\times c) - (a\times c) = c\times(b - a)$ (Factorisation du facteur c)
Deux cas,
** si $\boldsymbol{c > 0}$**,** les deux différences $(b\times c) - (a\times c)$ et $(b - a)$ ayant le même signe, les nombres $(b\times c)$ et $(a\times c)$ sont dans le même ordre que les nombres b et a.
** si $\boldsymbol{c < 0}$**,** ces deux différences ayant des signes contraires, les nombres $(b\times c)$ et $(a\times c)$ sont dans l'ordre inverse de celui de b et a.

Preuve du* II-4-2-3- : Produit d'inégalités*:
Comme $a < b$ et $c > 0$, d'après la propriété précédente II-4-2-1-: $a\times c < b\times c$. (1)
Comme $c < d$ et $b > 0$, d'après la propriété précédente II-4-2-1-: $b\times c < b\times d$. (2)
Par comparaison de (1) et (2), il vient d'après la propriété II-3- transitivité : $a\times c < b\times d$

Preuve du* II-4-3- : Inégalités et inverses*:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$$

Comme a et b sont strictement positifs, le produit ab est strictement positif.

Les différences $b - a$ et $a - b$ sont opposées. $b - a = -(a - b)$

$\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ et $b - a$ sont de signes opposés.

les nombres $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{a}$ sont dans l'ordre inverse de celui de b et a.