Index

Étude des suites arihmético-géométriques.

Ces suites sont de la forme $\begin{cases} u_0 = k \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$

Si $a = 1$, la suite (u_n) est arithmétique
Si $b = 0$, la suite (u_n) est géométrique.

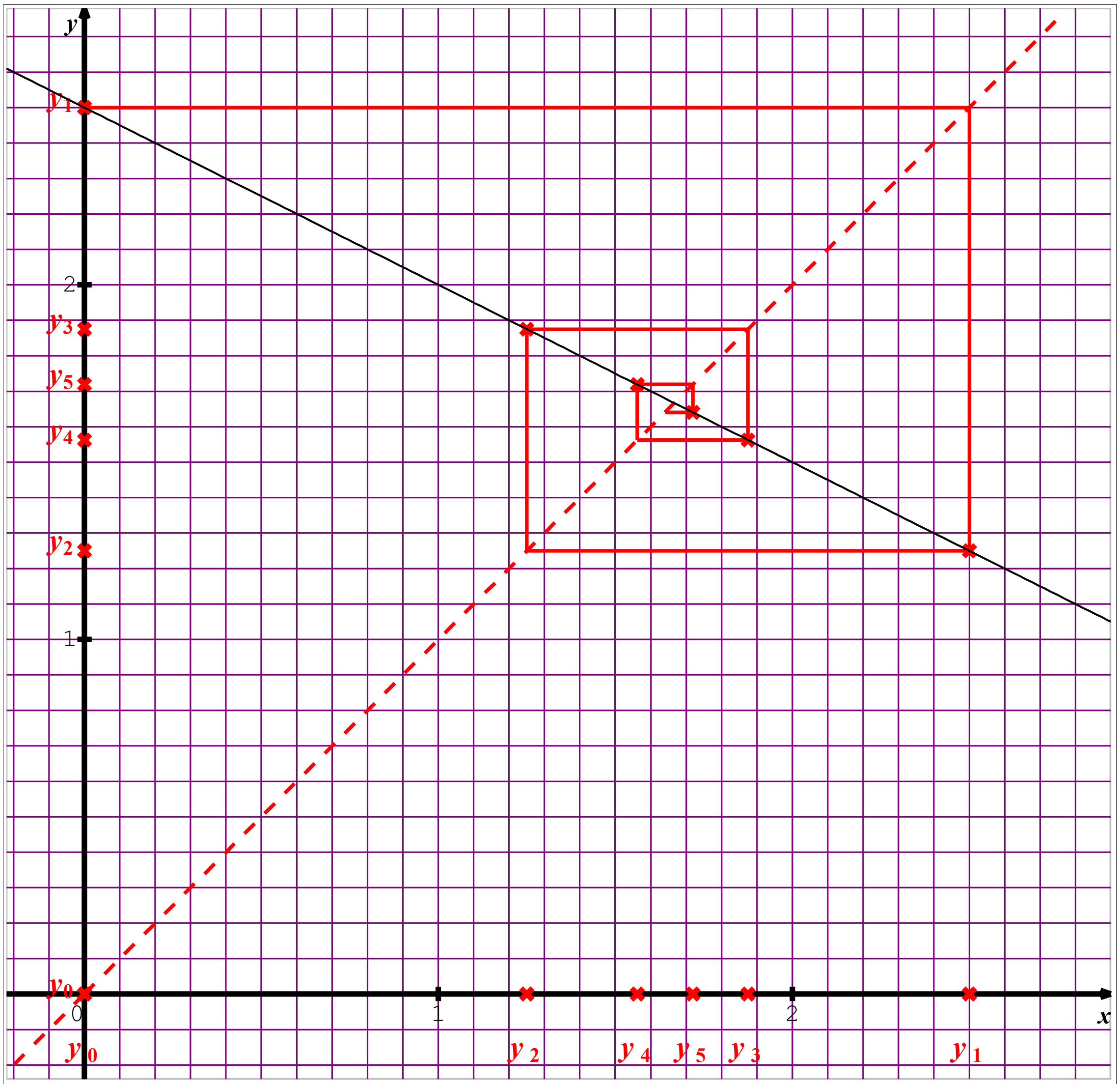
Pour étudier ces suites, on introduit une suite auxiliaire (w_n) qui sera une suite géométrique.

L'exemple suivant est l'étude de la suite obtenue au n° 63 page 94

(y_n) est définie par: $\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = -0{,}5\, y_n + 2{,}5 \end{cases}$.

Première approche: Approche graphique:

On trace la droite Δ d'équation $y = -0{,}5x + 2{,}5$.
Si on prend le point d'abscisse y_n sur la droite Δ alors don ordonnée est y_{n+1}.
La droite (d) d'équation $y = x$ permet dans un repère orthonormé de reporter facilement les ordonnées en abscisses, d'où, la construction suivante:



On trace la droite d'équation $y = -0,5x + 2,5$ et la droite d'équation $y = x$.

On place $y_0 = 0$. y_1 est donc l'ordonnée du point d'abscisse y_0 de Δ.

Sur la droite d on a le point de coordonnées (y_1, y_1) et y_2 est l'ordonnée du point de Δ d'abscisse y_1, etc.

La représentation graphique de la suite (y_n) montre que cette suite semble convergente vers le point d'intersection des droites Δ et d d'équations $y = x$ et $y = -0,5x + 2,5$.

L'équation $x = -0,5x + 2,5$ a pour solution $\frac{5}{3}$

Deuxième approche: approche théorique

On introduit une suite auxiliaire (w_n) définie par $w_n = y_n + \alpha$ en choisissant α pour que (w_n) soit une suite géométrique.

On veut donc: $\begin{cases} w_{n+1} = q w_n \\ w_{n+1} = y_{n+1} + \alpha \end{cases}$

L'égalité suivante: $q w_n = y_{n+1} + \alpha$ mène à $q(y_n + \alpha) = (-0,5y_n + 2,5) + \alpha$

Par identification: $q = -0,5$ et $q\alpha = 2,5 + \alpha$, soit: $-0,5\alpha = 2,5 + \alpha$.

α est donc solution de l'équation: $-0,5x = 2,5 + x$.

On trouve $\alpha = -\dfrac{5}{3}$

En pratique:

On pose $w_n = y_n - \dfrac{5}{3}$

D'où, $w_{n+1} = y_{n+1} - \dfrac{5}{3} = -0{,}5\, y_n + 2{,}5 - \dfrac{5}{3} = -0{,}5\, y_n + \dfrac{7{,}5-5}{3} = -0{,}5(y_n - \dfrac{5}{3}) = -0{,}5w_n$

(ou encore: puisque $y_n = w_n + 2{,}5$, on a:

$w_{n+1} = y_{n+1} - \dfrac{5}{3} = -0{,}5\, y_n + 2{,}5 - \dfrac{5}{3} = -0{,}5(w_n + 2{,}5) - \dfrac{5}{3} = ... = -0{,}5w_n$)

(w_n) est donc une suite géométrique de raison –0,5 et de premier terme $w_0 = 0 - \dfrac{5}{3} = -\dfrac{5}{3}$

On a alors: $w_n = \left(-\dfrac{5}{3}\right) \times (-0{,}5)^n$ et $y_n = w_n + \dfrac{5}{3} = \left(-\dfrac{5}{3}\right) \times (-0{,}5)^n + \dfrac{5}{3}$

Comme $-1 < -0{,}5 < 1$, la suite géométrique (w_n) converge vers 0 et (y_n) converge vers $\dfrac{5}{3}$.

On retrouve à partir de $y_n = \left(-\dfrac{5}{3}\right) \times (-0{,}5)^n + \dfrac{5}{3}$ les valeurs de la suite pour $n = 0$, puis $n = 1$, ..

Un deuxième exemple:

f est la solution de l'équation différentielle $y' = -2y + 3$ telle que $f(0) = -1$.
On construit les points M_n (x_n; y_n) approximant la courbe de f par la méthode d'Euler avec un pas de 0,1.

Montrer que la suite (y_n) est définie par: $\begin{cases} y_0 = -1 \\ y_{n+1} = 0{,}8\, y_n + 0{,}3 \end{cases}$.

En posant $w_n = y_n - 1{,}5$, étudier la suite (w_n) et la suite (y_n).

Par définition de la suite , on a: $y_{n+1} = y_n + f'(x_n)\times 0{,}1$ (approximation affine de f en u_n.)
Or, $f'(x_n) = -2y_n + 3$ (f solution de l'équation différentielle),
d'où : $y_{n+1} = y_n + (-2y_n + 3)\times 0{,}1 = 0{,}8y_n + 0{,}3$
Comme $f(0) = -1$, on a: $y_0 = -1$

En posant $w_n = y_n - 1{,}5$,

$w_{n+1} = y_{n+1} - 1{,}5 = 0{,}8y_n + 0{,}3 - 1{,}5 = 0{,}8y_n - 1{,}2 = 0{,}8(y_n - \dfrac{1{,}2}{0{,}8}) = 0{,}8(y_n - 1{,}5) = 0{,}8w_n$.

(w_n) est donc une suite géométrique de premier terme $w_0 = -1 - 1{,}5 = -2{,}5$, et de raison 0,8
d'où, $w_n = -2{,}5\times (0{,}8)^n$
et $y_n = -2{,}5\times (0{,}8)^n + 1{,}5$
Comme $-1 < 0{,}8 < 1$, la suite $(0{,}8^n)$ converge vers 0
et la suite (y_n) converge vers 1,5.