Index

Pour comprendre ces notions, il faut être prêt à faire des milliers de cercles ....

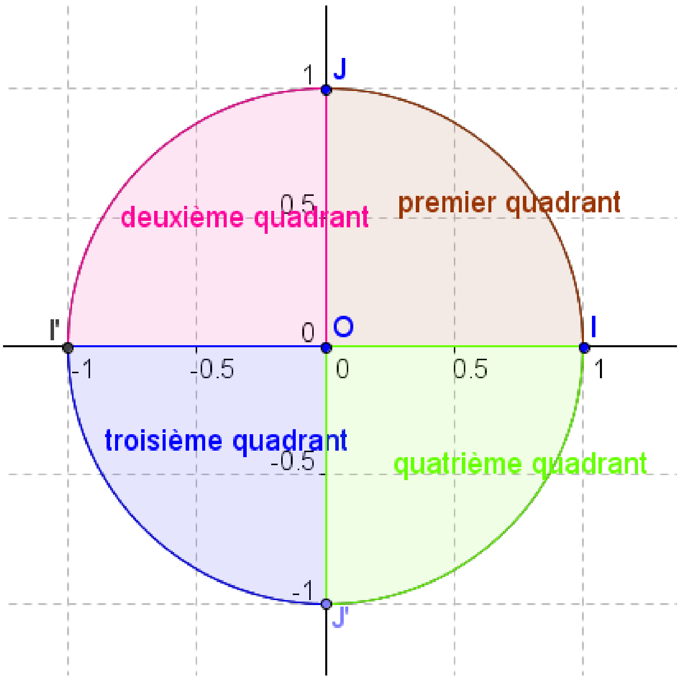
I- Sur le cercle trigonométrique

I-1- cercle gradué (pour se repérer sur le cercle)

I-1-1- Longueur d'un arc

Construire un grand cercle de centre O et de rayon 1. (La longueur unité du graphique est la longueur du rayon)

On note I un point du cercle.



Le point J est le point du cercle tel que repère $(O; I, J)$ est orthonormé direct (sens inverse de rotation des aiguilles d'une montre). (Voir figure en annexe).

(Le cercle est ainsi divisé en quatre quadrants : premier quadrant, deuxième quadrant, ... dans le sens direct.)

Construire dans le premier quadrant les points A, B tels que OIA est un triangle équilatéral, OJB est un triangle équilatéral.

Construire C à l'intersection de l'arc $\overset{\frown}{IJ}$ et de la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$.

On note I' et J' les points diamétralement opposés à I et J (autrement dit : $[II']$ et $[JJ']$ sont des diamètres.

On fait un tour de cercle dans le **sens direct** en partant de I et on note la distance parcourue en partant de I jusqu'au point ...... On obtient ainsi la longueur (dans l'unité du graphique) de l'arc.

arc de I à ...	B	C	A	J	I'	J'	I
Longueur	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Pour aller du point I à un point du cercle, il y a deux parcours possibles : dans le sens positif et dans le sens négatif

I- 1- 2- Enroulement d'une droite graduée ....

Soit une droite graduée (l'unité n'a pas changé) .... on place la droite tangente en I au cercle orientée de bas en haut. La graduation 0 de la droite graduée est en I.

On enroule le brin **positif** sur le cercle, on décalque les graduations ....

Quelles graduations se trouvent en A ? en B ? en C ?, en J ?, en I' ? en J' ?

points	B	C	A	J	I'	J'	I
Graduation	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

On enroule le brin **négatif** sur le cercle, on décalque les graduations ....

Quelles graduations se trouvent en A ? en B ? en C ?, en J ?, en I' ? en J' ?

points	B	C	A	J	I'	J'	I
Graduation	$-\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	-2π

I-2- Propriétés

Soit x un réel.

* Il existe un et un seul point M du cercle associé au réel x.

** Si M est un point du cercle associé à un réel x alors le point M est associé à tous les réels de la forme $x + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

*** Si x et y sont deux réels associés à un même point M du cercle alors il existe un **entier relatif** k tel que $x - y = 2k\pi$. (Deux réels associés à un même point diffèrent d'un multiple de 2π).

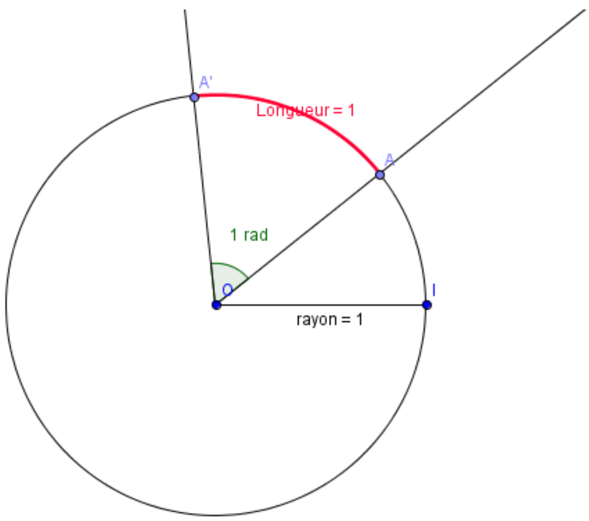
II- Le radian

II-1- Définition

Le radian est une unité d'angle.

Un angle de mesure un radian est un angle au centre du cercle trigonométrique qui intercepte un arc de longueur 1.

Autrement dit : La longueur de l'arc (en unité de longueur) intercepté par un angle au centre mesuré en radian et cet angle sont mesurés par le même nombre.



La mesure en radians d'un angle $\widehat{AOB}$ et la mesure de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ sur le cercle trigonométrique sont égales.

(Ce qui ne veut pas dire que l'angle est égal à l'arc ...)

II- 2- Propriété : longueur d'un arc

La longueur d'un arc de cercle de rayon R intercepté par un angle au centre de mesure α radian vaut αR

Autrement dit : Pour un cercle donné, la longueur de l'arc est proportionnelle à la mesure de l'angle, et lorsque que l'angle est mesuré en radians le coefficient de proportionnalité est le rayon du cercle ….

II- 3- Angles usuels

La mesure d'un angle en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés.

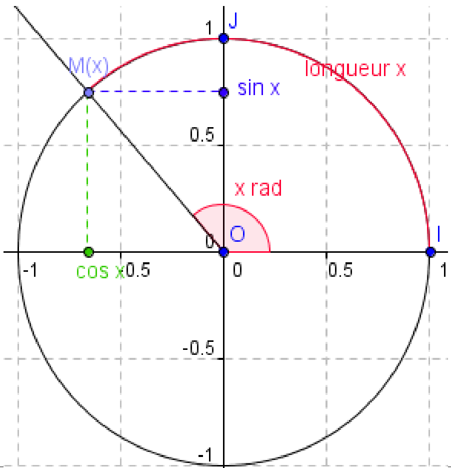
Compléter le tableau suivant :

angle en °	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

III- Sinus et cosinus

III-1- Définitions

Sur le cercle trigonométrique muni du repère orthonormé (O, I, J), le point M est associé au réel x.



On appelle cosinus de x, noté $\cos(x)$, l'abscisse de M dans ce repère (O, I, J)
On appelle sinus de x, noté $\sin(x)$, l'ordonnée de M dans ce repère (O, I, J)
On a donc: $M(\cos(x); \sin(x))$ dans ce repère (O, I, J).

ou encore : en notant $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, on a :

$\overrightarrow{OM} = \cos(x)\,\vec{i} + \sin(x)\,\vec{j}$.

III-2- Les valeurs remarquables (à connaître)

angles au centre	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
réel associé	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

III-3- Propriétés

Pour tout nombre réel x, on a:

$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$

Et de nouveau, le théorème de Pythagore :

$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$ On écrit aussi par abus de notation : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$

III-4- Angles associés

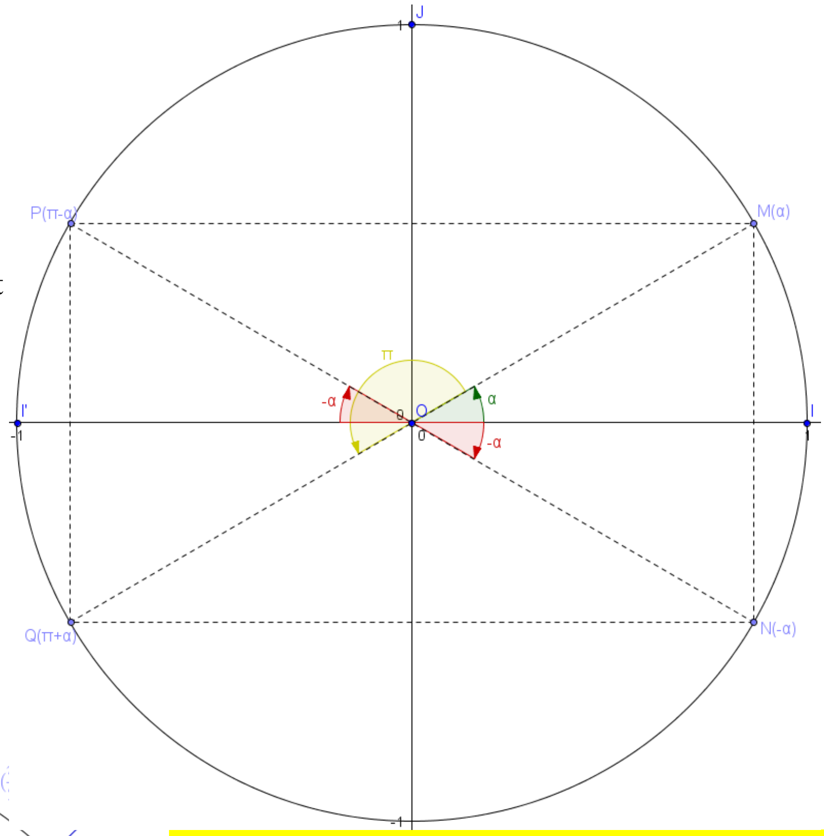
Le rectangle est inscrit dans le cercle trigonométrique.

Angles supplémentaires et opposés.

Les points M et N ont même abscisse et des ordonnées opposées.

Les points M et P ont des abscisses opposées et même ordonnée.

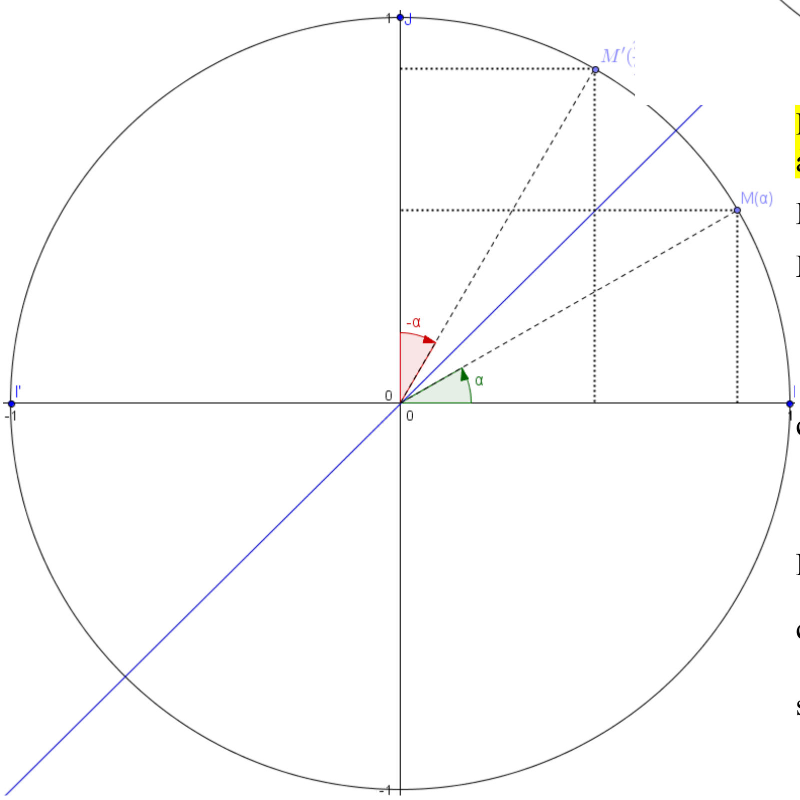
Les points M et Q ont des abscisses et des ordonnées opposées.



$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$



Les angles complémentaires : symétrie par rapport à la première bissectrice.

L'abscisse de M est l'ordonnée de M'.

L'ordonnée de M' est l'abscisse de M.

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$ $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$

Placer le point repéré par $\frac{\pi}{2} + \alpha$:

$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin(\alpha)$

$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos(\alpha)$

commentaires : ces relations se retrouvent en faisant à chaque fois, un schéma …. ne cherchez pas à apprendre par cœur les relations, cherchez à savoir comment les retrouver : l'essentiel est d'avoir retenu comment un point est repéré par un réel sur le cercle trigonométrique et les définitions des cosinus et sinus.

Cercle gradué complété