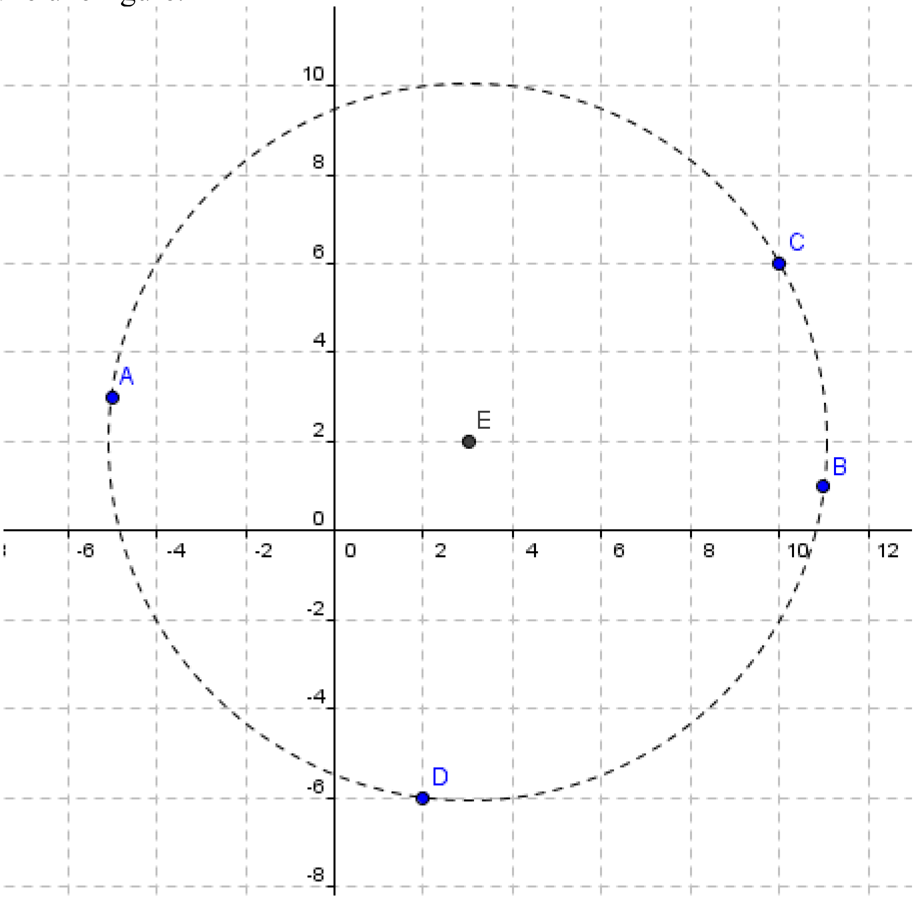
Index

102 page 173 Points cocycliques.

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on a: $A(-5; 3)$, $B(11, 1)$, $C(10; 6)$, $D(2; -6)$
Pour la recherche, faire une figure.



Il semble que les quatre points sont sur le cercle de diamètre $[AB]$.
Une preuve:

Le milieu E de [AB] a pour coordonnées: $\begin{cases} x_E = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-5+11}{2} = 3 \\ y_E = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2 \end{cases}$

Calcul de la longueur AB

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (11 - (-5))^2 + (1 - 3)^2 = 16^2 + (-2)^2 = 260 = 4\times65$

$AB = 2\sqrt{65}$, d'où, $EA = EB = \sqrt{65}$

Calcul des longueurs EC et ED

$EC^2 = (x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2 = (10 - 3)^2 + (6 - 2)^2 = 7^2 + 4^2 = 65$

$ED^2 = (x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2 = (2 - 3)^2 + (-6 - 2)^2 = (-1)^2 + (-8)^2 = 65$

d'où, $EC = ED = \sqrt{65}$

Conclusion:

E étant le milieu de $[AB]$, et sachant que $EA = EB = EC = ED = \sqrt{65}$, les quatre points A, B, C, D sont sur le cercle de centre E et de rayon $\sqrt{65}$, et, $[AB]$ est un diamètre de ce cercle.

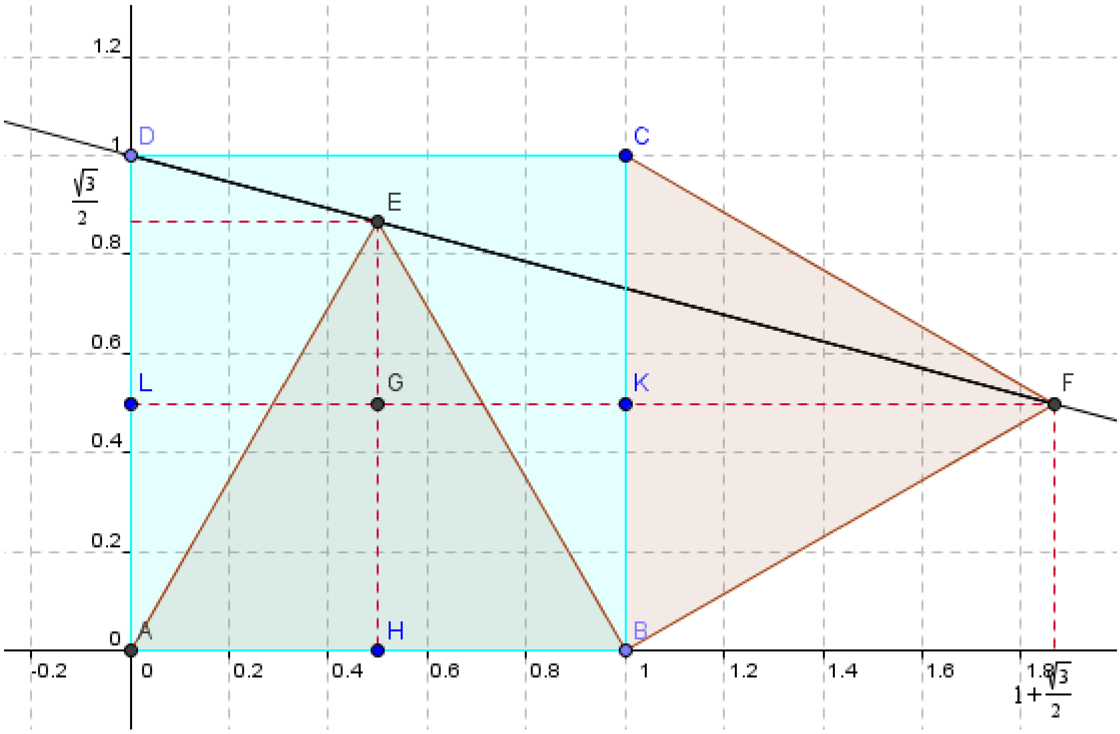
Une autre méthode:
On montre que ABC et ABD sont des triangles rectangles d'hypoténuse AB.
On calcule donc:
$AB^2 = 260$ (voir ci-dessus)
$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (10 - (-5))^2 + (6 - 3)^2 = 15^2 + 9^2 = 234$
$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (10 - 11)^2 + (6 - 1)^2 = (-1)^2 + 5^2 = 26$
Or, $26 + 234 = 260$
Comme $AB^2 = AC^2 + BC^2$, le triangle ABC est rectangle en C.

$AD^2 = (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 = (2 - (-5))^2 + (-6 - 3)^2 = 7^2 + (-9)^2 = 130$
$BD^2 = (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 = (2 - 11)^2 + (-6 - 1)^2 = (-9)^2 + (-7)^2 = 130$
Or, $130 + 130 = 260$
Comme $AB^2 = AD^2 + BD^2$, le triangle ABD est rectangle en D. (Il est aussi isocèle d'après le calcul précédent)

Les deux triangles rectangles d'hypoténuse $[AB]$ sont inscrits dans le cercle de diamètre $[AB]$.

---

106 page 173



1) Dans le repère (A, B, D)

A a pour coordonnées (0, 0) (origine du repère)

B a pour coordonnées (1, 0) (B marque l'unité en abscisse)

D a pour coordonnées (0, 1) (D marque l'unité en ordonnée)

C a pour coordonnées (1, 1) (car, $ABCD$ est un carré)

b) **Le point *E* est défini par : *ABE* triangle équilatéral.**

$EH^2 + HA^2 = AE^2$ (Théorème de Pythagore dans le triangle AEH rectangle en H)

Or, $AE = AB = 1$ (triangle équilatéral)

$AH = HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{1}{2}$ (Dans un triangle équilatéral, la hauteur est aussi une médiane du côté)

On a donc: $EH^2 = 1^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$

$EH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarquer que le calcul est valable pour le triangle BCF qui est équilatéral de côté 1.

Le point E a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et le point F a pour coordonnées $\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

2/ **Une méthode :**

Calculons les trois longueurs: DE, DF et EF.

$DE^2 = \left(\dfrac{1}{2}-0\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} - \sqrt{3} + 1 = 2 - \sqrt{3}$

$DE = \sqrt{2-\sqrt{3}}$

$EF^2 = \left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{4} = 2$

$EF = \sqrt{2}$

$DF^2 = \left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2 = \left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 = 1 + \sqrt{3} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 2 + \sqrt{3}$

$DF = \sqrt{2+\sqrt{3}}$

Montrons que $DE + EF = DF$

ou encore que $DF - DE = EF$

Comme les nombres sont positifs, il suffit de montrer que $(DF - DE)^2 = EF^2$

soit $DF^2 - 2\times DF\times DE + DE^2 = EF^2$

Or, $DF^2 - 2\times DF\times DE + DE^2 = 2 + \sqrt{3} + 2\times \sqrt{2+\sqrt{3}} \times \sqrt{2-\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3} =$

$= 4 + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$= 4 - 2\sqrt{2^2-3}$

$= 4 - 2 = 2$

Comme $EF^2 = 2$, l'égalité est démontrée.

Le point E appartient au segment $[DF]$

Autre méthode.

On construit le triangle *FDL* où *L* est le point de coordonnées (0; 0,5), et le point *G* point d'intersection de (*FL*) et (*EH*).

Comme (*EG*) parallèle à (*DL*), on applique la réciproque du théorème de Thalès.

On calcule $\dfrac{EG}{DL} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}-1$

et $\dfrac{FE}{FD} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

Pour comparer les deux nombres positifs, on compare leurs carrés.

$$\left(\frac{FE}{FD}\right)^2 = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4-3} = 4-2\sqrt{3}$$

et $\left(\dfrac{ED}{DL}\right)^2 = (\sqrt{3}-1)^2 = 3-2\sqrt{3}+1 = 4-2\sqrt{3}$

Et encore une autre méthode :

On peut comparer la somme des aires du trapèze *LGED* et du triangle *FGE* et l'aire du triangle *FLD*.

Si cette somme d'aires est égale à celle du triangle alors les points *F*, *L*, *D* seront alignés.

En effet, puisque deux côtés sont superposés, le troisième côté [*FD*] sera superposé aux deux segments [*FE*] et [*ED*].

Calculs :

$\mathscr{A}(LGED) = \dfrac{(EG+LD)\times LG}{2}$; $\mathscr{A}(FGE) = \dfrac{FG\times EG}{2}$; $\mathscr{A}(FLD) = \dfrac{FL\times LD}{2}$.

$$\frac{(EG+LD)\times LG}{2} + \frac{FG\times EG}{2} \overset{?}{=} \frac{FL\times LD}{2}$$

En multipliant par 2 les deux membres, on a :

$$(EG+LD)\times LG + FG\times EG \overset{?}{=} FL\times LD$$

Comme $LD = GH = \dfrac{1}{2}$, $EG + LD = EH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $LG = \dfrac{1}{2}$; $FG = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$;

$EG = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$; $FL = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On doit donc vérifier :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\times\frac{\sqrt{3}-1}{2} \overset{?}{=} \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}.$$

En multipliant par 2 les deux membres, on a :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{2} \overset{?}{=} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ou encore : $\dfrac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{2} \overset{?}{=} 1$

Or : $\dfrac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{2} = \dfrac{3-1}{2} = 1$.

Ce qui termine la démonstration.

---

88 page 73

Soit x la note que Charlène veut obtenir pour avoir une moyenne au moins égale à 14.

Sachant que le devoir compte double, on a : $\dfrac{12+15+11+2x}{1+1+1+2} \geqslant 14$

On en déduit : $38 + 2x \geqslant 5\times14$, soit : $2x \geqslant 70 - 38$, puis : $x \geqslant \dfrac{32}{2}$ Or, $\dfrac{32}{2} = 16$

La note minimale que doit avoir Charlène est : 16
