Index

88 page 99 1
125 page 101 2
4 page 244 3
TD3 page 109 4

88 page 99

f est une fonction définie sur ℝ par $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$ (forme développée)

$= 2(x-2)(x+1)$ (forme factorisée)

$= -\frac{9}{2} + 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ (forme canonique)

Remarque : en développant : $2(x-2)(x+1) = 2(x^2 - x - 2) = 2x^2 - 2x - 4$

$$-\frac{9}{2} + 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 2x^2 - 2x - 4$$

1) Image de (-3) :

Forme développée ou forme factorisée : $f(-3) = 2\times(-3)^2 - 2\times(-3) - 4 = 2\times 9 + 6 - 4 = 20$

ou $f(-3) = 2\times(-3-2)\times(-3+1) = 2\times(-5)\times(-2) = 20$

Image de 2 :

Forme factorisée : $f(2) = 2\times(2-2)\times(2+1) = 0$ (**un facteur nul**)

Image de $\frac{1}{2}$:

Forme canonique : $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}$ car $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$

3) Image de $\sqrt{3}$:

Forme développée $f(\sqrt{3}) = 2\times(\sqrt{3})^2 - 2\times(\sqrt{3}) - 4 = 2\times 3 - 2\sqrt{3} - 4 = 2 - 2\sqrt{3}$.

Image de $1-\sqrt{5}$

Forme factorisée

$f(1-\sqrt{5}) = 2(1-\sqrt{5}-2)(1-\sqrt{5}+1) = 2(-1-\sqrt{5})(2-\sqrt{5}) = 2(-2+\sqrt{5}-2\sqrt{5}+5)$

$= 2(3-\sqrt{5}) = 6-2\sqrt{5}$

ou forme développée :

$f(1-\sqrt{5}) = 2(1-\sqrt{5})^2 - 2(1-\sqrt{5}) - 4 = 2(1-2\sqrt{5}+5) - 2 + 2\sqrt{5} - 4 = 12 - 4\sqrt{5} - 6 + 2\sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{5}$

3) Résoudre $f(x) = 0$

Forme factorisée (car, un produit est nul …...)

Les solutions : 2 et –1

4) Résoudre $f(x) = -4$

Forme développée (car, le coefficient $c = -4$)

$2x^2 - 2x - 4 = -4$ si et seulement si $2x^2 - 2x = 0$ si et seulement si $2x(x-1) = 0$

Les solutions : 0 et 1

5) Résoudre $f(x) = -\frac{1}{2}$

Forme canonique :

$-\frac{9}{2} + 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$ si et seulement si $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}$

$2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = 4$ si et seulement si $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = 2$

On a alors : $x - \frac{1}{2} = -\sqrt{2}$ ou $x - \frac{1}{2} = \sqrt{2}$;

Deux solutions : $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$ et $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

6) Variations de f,

comme le coefficient de x^2 est 2 strictement positif et que la forme canonique nous donne le minimum $\frac{-9}{2}$ atteint en $\frac{1}{2}$, on a :

f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ et f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Bilan

f est une fonction polynôme du second degré, $f(x)$ peut s'écrire :			
Expression algébrique	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (parfois impossible)
Dans l'exercice 88	$f(x) = 2x^2 - 2x - 4$	$f(x) = -\frac{9}{2} + 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$	$f(x) = 2(x-2)(x+1))$
Informations immédiates pour la représentation graphique	Signe de a et $C(0, c)$	Signe de a et $S(\alpha, \beta)$	Signe de a et $A(x_1 ; 0)$, $B(x_2 ; 0)$
pour l'étude de fonction		Variations	

*** On montre les égalités grâce à la maîtrise du calcul algébrique
*** On choisit la forme la plus adaptée

- pour l'intersection avec l'axe des ordonnées en calculant $f(0)$ (c'est le coefficient c de la forme développée)
- pour l'intersection avec l'axe des abscisses en résolvant l'équation $f(x) = 0$ (forme factorisée pour obtenir une équation produit)
- pour le sommet de la parabole et/ou l'extremum de la fonction, on choisit la forme canonique.

Dans tous les cas, on relève le coefficient de x^2.
Dans tous les cas, on crée des liens entre les différentes formes.
On n'oublie pas que la parabole possède un axe de symétrie.

125 page 101

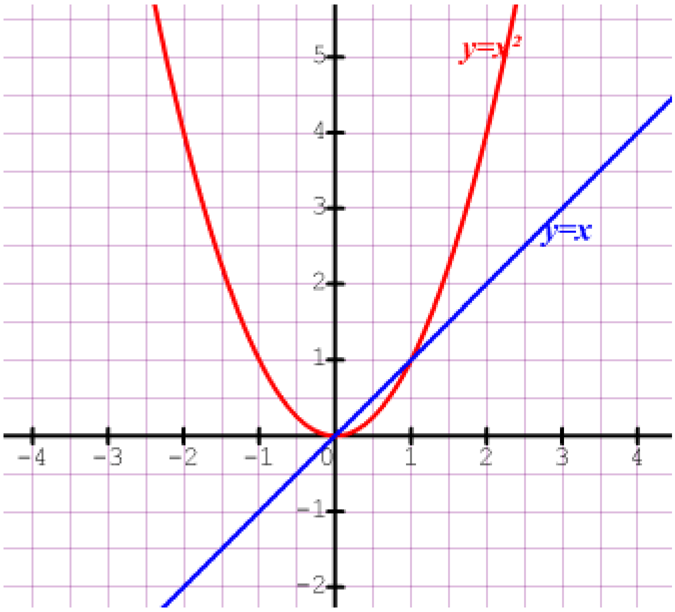
1) $f(x) = g(x)$ si et seulement si $x^2 = x$ si et seulement si $x^2 - x = 0$ si et seulement si $x(x-1) = 0$

Deux solutions : 0 et 1

2) $f(x) \geqslant g(x)$ si et seulement si C_f est au-dessus de C_g.

On lit : S = $]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$.

Graphique :



4 page 244

Lors d'un championnat, un sportif de haut niveau a réalisé en saut en longueur les performances suivantes (en mètres) :
8,30 – 8,23 – 7,78 – 8,16 – 7,93 – 8,31 – 8,24 – 8,30 – 8,35 – 8,30 – 7,90 – 8,18 – 8,12 – 7,97 – 8,24 – 8,18.

Série dépouillée et classée dans l'ordre des valeurs croissantes

Longueur	**7,78**	**7,90**	**7,93**	**7,97**	**8,12**	**8,16**	**8,18**	**8,23**	**8,24**	**8,30**	**8,31**	**8,35**
effectif	1	1	1	1	1	1	2	1	2	3	1	1
effectif	1	2	3	4	5	6	8	9	11	14	15	16

Longueur	**7,78**	**7,90**	**7,93**	**7,97**	**8,12**	**8,16**	**8,18**	**8,23**	**8,24**	**8,30**	**8,31**	**8,35**
cumulé croissant												

1- Moyenne de la série : $\dfrac{7{,}78+7{,}90+7{,}93+7{,}97+8{,}12+8{,}18\times2+8{,}23+8{,}24\times2+8{,}30\times3+8{,}31+8{,}35}{16} =$

$$\frac{130{,}49}{16} = 8{,}155\ 625 \text{ m}$$

2- L'effectif total vaut 16

16 étant un nombre pair, la valeur médiane est la moyenne des 8ème et 9ème valeurs.

Médiane de la série : Me = $\dfrac{8{,}18+8{,}23}{2}$ = 8,205 m

3- Le premier quartile est la plus petite valeur Q_1 telle qu'au moins 25 % (un quart) de l'effectif prend une valeur inférieure ou égale à Q_1

Pour déterminer Q_1 : on divise l'effectif par 4, $\dfrac{16}{4}$ = 4. Q_1 est la 4ème valeur de la série.

Premier quartile : Q_1 = 7,97 m

Le troisième quartile est la plus petite valeur Q_3 telle qu'au moins 75 % (trois quarts) de l'effectif prend une valeur inférieure ou égale à Q_3

Pour déterminer Q_3 : on divise l'effectif par 4 et on multiplie par 3, $\dfrac{3\times16}{4}$ = 12. Q_3 est la 12ème valeur de la série.

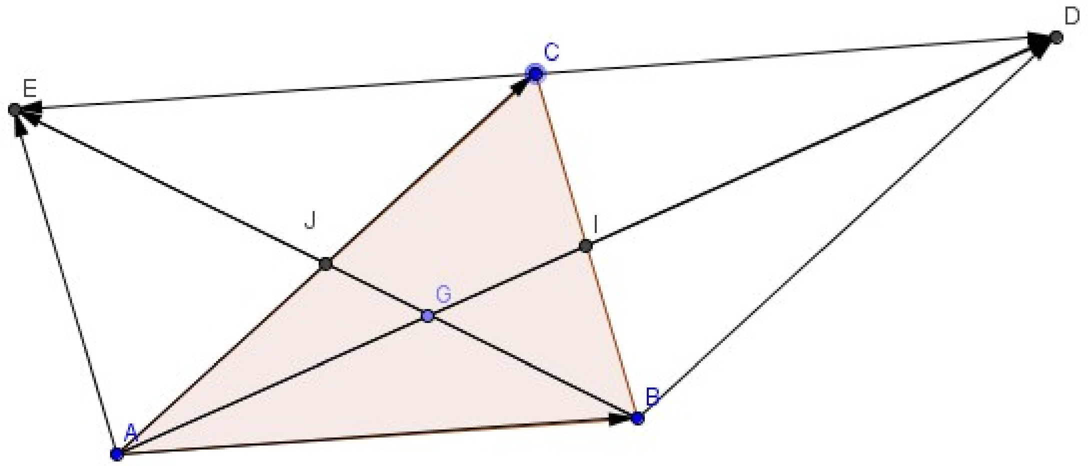
Troisième quartile : Q_3 = 8,30 m

Complément : Si $\dfrac{N}{4}$ n'est pas un entier, on prend le premier entier supérieur à $\dfrac{N}{4}$

Par exemple, si l'effectif est N = 17, Q_1 est la 7ème valeur de la série.

TD3 page 209

A) Figure



B) **Démonstration**

Données : *ABC* triangle, *I* milieu de [*BC*] et *J* celui de [*AC*].

1 a) *D* est défini par $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

b) *ABDC* est par conséquent un parallélogramme, de centre *I*, milieu de la diagonale [*BC*].

I est alors le milieu de l'autre diagonale [*AD*].

On en déduit : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI}$

Conclusion : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$

2) *G* est le point défini par : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}) = 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Comme $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, on obtient : $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

b) $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ équivaut à $3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ équivaut à $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

c) Comme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$, il vient : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

3- On construit le parallélogramme BAEC en construisant le point E défini par $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

Le milieu *J* de la diagonale [*AC*] est celui de [*BE*], donc, $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BJ}$.

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = (\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{GB}+(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}) = 3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

Comme $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, on obtient : $3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$, soit : $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$.

4) De l'égalité du 2c/, on en déduit : les points G, A, I sont alignés.

De l'égalité du 3/, on en déduit : les points G, B, J sont alignés.

Le point G est un point de la médiane (AI) et un point de la médiane (BJ).

G est donc le centre de gravité du triangle ABC.

On a aussi montré que G est situé aux $\frac{2}{3}$ de la médiane à partir du sommet.