Index

97 page 150

ABCD est un rectangle de dimensions : AB = 3 et AD = 4

E ∈ [BC], F ∈ [AB] tels que AF = BE

1) Construction avec GeoGebra

Faire le rectangle de dimensions données.

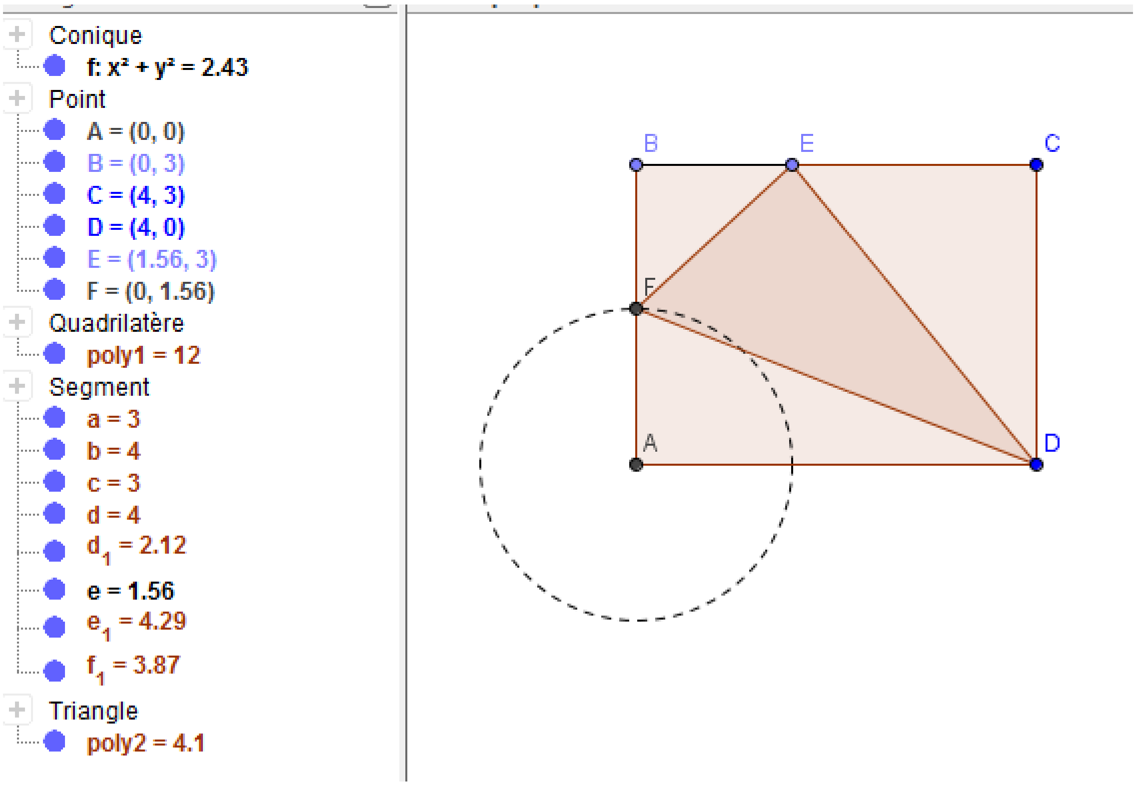
Placer E sur le segment [BC] et construire le segment [BE] (dans la fenêtre algèbre, sa longueur apparaît).

Construire le cercle de centre A et de rayon la longueur BE.

Le point F est le point d'intersection de ce cercle et du côté [AB] du rectangle.

Construire le triangle EFD

En déplaçant E sur le segment [BC], on cherche les positions qui permettent de répondre à la contrainte : aire (EFD) supérieure ou égale à 4,2



2) On pose BE = x

a) x, étant une longueur, est un réel positif.
Le point F se déplace sur [AB], et , la longueur AF = BE = x ne peut dépasser celle de [BC] qui vaut 3, donc $x \in [0 ; 3]$

b) L'aire de EFD est l'aire du rectangle diminuée des aires des trois triangles rectangles :

$$\mathcal{A}(x) = 4\times 3 - \frac{4x}{2} - \frac{3(4-x)}{2} - \frac{x(3-x)}{2} = 12 - 2x - 6 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$$

c) $\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) + 4 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 + 4 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = \mathcal{A}(x)$.

3 a) Comme $\frac{1}{2} > 0$ (coefficient de x^2), et, d'après le 3 c) (forme canonique de la fonction $\mathcal{A}$ du second degré), on sait que $\mathcal{A}$ est strictement décroissante sur [0 ; 2] et croissante sur [2 ; 3]
Elle atteint son minimum 4 en 2.
On cherche les antécédents de 4,2 :

$$\mathcal{A}(x) = 4{,}2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 = 4{,}2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = 0{,}4 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = -\sqrt{0{,}4} \text{ ou } x - 2 = \sqrt{0{,}4}$$

$$x_1 = 2 - \sqrt{0{,}4} \text{ ou } x_2 = 2 + \sqrt{0{,}4} \quad (x_1 \approx 1{,}37 \text{ et } x_2 \approx 2{,}63)$$

x	0	$\boldsymbol{x_1}$	2	$\boldsymbol{x_2}$	3
$A(x)$		4,2 ↘	4	↗ 4,2	

Solutions : aire de EFD est supérieure ou égale à 4,2 si et seulement si $0 \leqslant x \leqslant 2 - \sqrt{0{,}4}$ ou $2 + \sqrt{0{,}4} \leqslant x \leqslant 3$

b) Tableau de signes :

$$\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 \geqslant 4{,}2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-2)^2 - 0{,}2 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 0{,}4 \geqslant 0 \Leftrightarrow [(x-2)-\sqrt{0{,}4}][(x-2)+\sqrt{0{,}4}] \geqslant 0$$

x	0		$2-\sqrt{0{,}4}$		$2+\sqrt{0{,}4}$		3
$x-2-\sqrt{0{,}4}$		–	⋮	–	0	+	
$x-2+\sqrt{0{,}4}$		–	0	+	⋮	+	
$A(x) - 4{,}2$		+	0	–	0	+	

On retrouve le résultat précédent.

---

97 page 127

Propriétés utiles :

1) On ne peut pas diviser par 0

2) a, b, c et d sont des réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$

ou encore

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 0$ si et seulement si $\frac{ad-bc}{bd} = 0$

Le quotient est nul si et seulement si le numérateur $ad - bc = 0$ (on retrouve $ad = bc$))

a) $\frac{x+4}{x-2} = \frac{2}{3}$ si et seulement si $\begin{cases} x \neq 2 \\ 3(x+4) = 2(x-2) \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} x \neq 2 \\ x = -16 \end{cases}$.

L'équation possède une et une seule solution : –16

Autre méthode :

$\frac{x+4}{x-2} = \frac{2}{3}$ est défini si et seulement si $x \neq 2$.

$\frac{x+4}{x-2} - \frac{2}{3} = 0$ si et seulement si $\frac{3\times(x+4) - 2\times(x-2)}{3\times(x-2)} = 0$

Le numérateur doit être égal à 0, soit : $3x + 12 - 2x + 4 = 0$.

On retrouve : $x = -16$

b) $\frac{x+2}{x-3} = \frac{x-3}{x+2}$ si et seulement si $\begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 2 \\ (x+2)^2 = (x-3)^2 \end{cases}$

En développant, on obtient : $x^2 + 4x + 4 = x^2 - 6x + 9$ et, après réduction : $10x = 5$, soit : $x = \frac{1}{2}$.

L'équation possède une et une seule solution : $\frac{1}{2}$

Autre méthode :

$\frac{x+2}{x-3} = \frac{x-3}{x+2}$ est défini si et seulement si $x \neq 3$ et $x \neq -2$.

$\frac{x+2}{x-3} - \frac{x-3}{x+2} = 0$ si et seulement si $\frac{(x+2)^2 - (x-3)^2}{(x-3)(x+2)} = 0$

Le numérateur doit être égal à 0, soit : $x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 6x + 9) = 0$

On retrouve après réduction $x = \frac{1}{2}$.

---

107 page 173

Propriété utile :

I milieu de [AB] : $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$.

Soit un segment [AB]

I_1 est le milieu de [AB], I_2 celui de [AI_1], I_3 celui de [AI_3], et ainsi de suite

1) A(5 ; –7) et B(–2 043 ; –519)

$I_1 \begin{cases} x_{I_1}=\dfrac{5-2043}{2} \\ y_{I_1}=\dfrac{-7-519}{2} \end{cases} = \begin{cases} x_{I_1}=-1019 \\ y_{I_1}=-263 \end{cases} \qquad I_2 \begin{cases} x_{I_2}=\dfrac{5-1019}{2}=-507 \\ y_{I_2}=\dfrac{-7-263}{2}=-135 \end{cases} \dots$

D'où, l'intérêt d'un algorithme … où, les coordonnées du milieu remplacent celles de B.

Description de l'algorithme :

VARIABLES :

Coordonnées de A et coordonnées de B : x_A, y_A, x_B, y_B

Coordonnées du milieu I : $x_I ; y_I$

Indice du milieu cherché : *n*

TRAITEMENT

Saisir les coordonnées de A : x_A, y_A

Saisir les coordonnées de B : x_B, y_B

Saisir l'indice *n*.

Pour *i* allant de 1 à *n*

x_I prend la valeur $\dfrac{x_A+x_B}{2}$.

y_I prend la valeur $\dfrac{y_A+y_B}{2}$

x_B prend la valeur x_I

y_B prend la valeur y_I .

Fin Pour

Afficher x_I et y_I .

(Tester avec *n* =1, *n* = 2 ou avec une autre valeur de *n* si on connaît les coordonnées du milieu I_n)

```
VARIABLES
  abscisseA EST_DU_TYPE NOMBRE
  ordonnéeA EST_DU_TYPE NOMBRE
  abscisseB EST_DU_TYPE NOMBRE
  ordonnéeB EST_DU_TYPE NOMBRE
  abscisseI EST_DU_TYPE NOMBRE
  ordonnéeI EST_DU_TYPE NOMBRE
  indice EST_DU_TYPE NOMBRE
  compteur EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE abscisseA
  LIRE ordonnéeA
  LIRE abscisseB
  LIRE ordonnéeB
  LIRE indice
  POUR compteur ALLANT_DE 1 A indice
    DEBUT_POUR
    abscisseI PREND_LA_VALEUR (abscisseA+abscisseB)/2
    ordonnéeI PREND_LA_VALEUR (ordonnéeA+ordonnéeB)/2
    abscisseB PREND_LA_VALEUR abscisseI
    ordonnéeB PREND_LA_VALEUR ordonnéeI
    FIN_POUR
  AFFICHER abscisseI
  AFFICHER ordonnéeI
FIN_ALGORITHME
```

```
PROGRAM:MILIEUX
:Input "ABS A ",A
:Input "ORD A ",B
:Input "ABS B ",C
:Input "ORD B ",D
:Input "IND ",N
:For(I,1,N)
:(A+C)/2→E
:(B+D)/2→F
:E→C
:F→D
:End
:Disp E
:Disp F
:
```

Pour tester avec les valeurs calculées de I₁ et I₂

```
***Algorithme lancé***
Entrer abscisseA : 5
Entrer ordonnéeA : -7
Entrer abscisseB : -2043
Entrer ordonnéeB : -519
Entrer indice : 1
-1019
-263
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer abscisseA : 5
Entrer ordonnéeA : -7
Entrer abscisseB : -2043
Entrer ordonnéeB : -519
Entrer indice : 2
-507
-135
***Algorithme terminé***
```

```
ORD A -7
ABS B -2043
ORD B -519
IND 5
                 -59
                 -23
                Done
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer abscisseA : 5
Entrer ordonnéeA : -7
Entrer abscisseB : -2043
Entrer ordonnéeB : -519
Entrer indice : 5
-59
-23
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer abscisseA : 5
Entrer ordonnéeA : -7
Entrer abscisseB : -2043
Entrer ordonnéeB : -519
Entrer indice : 10
3
-7.5
***Algorithme terminé***
```

```
ORD A -7
ABS B -2043
ORD B -519
IND 10
                   3
                -7.5
                Done
```

I_5 (–59 ; –23) et I_{10} (3 ; –7,5)

2) A(2 ; –6) et I_{20} (3 ; 5)

Recherche d'une relation ….

Comme les formules sont identiques entre abscisses et ordonnées (il suffit de changer x en y), la recherche peut se faire seulement sur l'abscisse.

On peut calculer l'abscisse de I_{19} puisque $x_{I_{20}}=\dfrac{(x_A+x_{I_{19}})}{2}$, on a : $x_{I_{19}}=2\times x_{I_{20}}-x_A$

puis $x_{I_{18}} = 2\times x_{I_{19}}-x_A$ et ainsi de suite ….

Pour obtenir l'abscisse de B, il faudra répéter 20 fois ce calcul …

d'où, un algorithme.

VARIABLES :

Coordonnées de A et coordonnées de B : x_A, y_A, x_B, y_B

Coordonnées du milieu I : $x_I ; y_I$

Indice du milieu connu : *n*

TRAITEMENT

Saisir les coordonnées de A : x_A, y_A

Saisir les coordonnées de I : $x_I ; y_I$

Saisir l'indice *n*.

Pour *i* allant de 1 à *n*

x_I prend la valeur $2\times x_I-x_A$.

y_I prend la valeur $2\times y_I-y_A$

Fin Pour

Afficher x_I et y_I .

(Tester avec des valeurs connues par exemple, les coordonnées des points du 1/)

```
VARIABLES
  abscisseA EST_DU_TYPE NOMBRE
  ordonnéeA EST_DU_TYPE NOMBRE
  abscisseB EST_DU_TYPE NOMBRE
  ordonnéeB EST_DU_TYPE NOMBRE
  abscisseI EST_DU_TYPE NOMBRE
  ordonnéeI EST_DU_TYPE NOMBRE
  indice EST_DU_TYPE NOMBRE
  compteur EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE abscisseA
  LIRE ordonnéeA
  LIRE abscisseI
  LIRE ordonnéeI
  LIRE indice
  POUR compteur ALLANT_DE 1 A indice
    DEBUT_POUR
    abscisseI PREND_LA_VALEUR 2*abscisseI-abscisseA
    ordonnéeI PREND_LA_VALEUR 2*ordonnéeI-ordonnéeA
    FIN_POUR
  AFFICHER abscisseI
  AFFICHER ordonnéeI
FIN_ALGORITHME
```

Testé avec I_{10} du 1/

```
***Algorithme lancé***
Entrer abscisseA : 5
Entrer ordonnéeA : -7
Entrer abscisseI : 3
Entrer ordonnéeI : -7.5
Entrer indice : 10
-2043
-519
***Algorithme terminé***
```

Lorsque A(2 ; –6) et I_{20} (3 ; 5) ,

```
***Algorithme lancé***
Entrer abscisseA : 2
Entrer ordonnéeA : -6
Entrer abscisseI : 3
Entrer ordonnéeI : 5
Entrer indice : 20
1048578
11534330
***Algorithme terminé***
```

les coordonnées de B(1 048 578 ; 11 534 330)