Index

Dans tous ces exercices x et y sont des réels …

I- Inéquations du premier degré

1) Résoudre l'inéquation (réponse immédiate)

a) $x + 8 < 10 \Leftrightarrow x < 2$, d'où, $\mathcal{S}_a =]-\infty\ ; 2[$

b) $2x - 4 < 16 \Leftrightarrow 2x < 20 \Leftrightarrow x < 10$, d'où, $\mathcal{S}_b =]-\infty\ ; 10[$

c) $-5x + 10 < 15 \Leftrightarrow -5x < 5 \Leftrightarrow x > -1$, d'où, $\mathcal{S}_c =]-1 ; +\infty[$

Rappel :

Théorème 1 :

L'ordre est inchangé lorsqu'on ajoute (ou retranche) n'importe quel nombre réel aux deux membres de l'inégalité.

Théorème 2 :

L'ordre est inchangé lorsqu'on multiplie (ou divise) par un nombre réel **strictement positif** les deux membres de l'inégalité.

Théorème 3:

L'ordre change lorsqu'on multiplie (ou divise) par un nombre réel **strictement négatif** les deux membres de l'inégalité.

Lien avec le cours de seconde :

La fonction affine $x \mapsto x + b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (L'ordre est inchangé lorsqu'on applique la fonction).

Si $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (L'ordre est inchangé lorsqu'on applique la fonction).

Si $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$, la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. (L'ordre change lorsqu'on applique la fonction).

2) Résoudre l'inéquation (réponse presque immédiate)

a) $2x + 8 < x - 3 \Leftrightarrow x < -11$, d'où, $\mathcal{S}_a =]-\infty\ ; -11[$

b) $2x + 8 < 5x - 4 \Leftrightarrow -3x < -12 \Leftrightarrow x > 4$, d'où, $\mathcal{S}_b =]4 ; +\infty[$

c) $2(x+4) < x-(2x-3) \Leftrightarrow 2x+8 < -x+3 \Leftrightarrow 3x < -5 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{3}$, d'où, $\mathscr{S}_c = \left]-\infty ; -\frac{5}{3}\right[$.

3) Résoudre le système de deux inéquations à une inconnue.

Rappel :

L'accolade $\left\{ \right.$ signifie " ET ".

On cherche l'ensemble des solutions **communes** aux deux inéquations, autrement dit,
si S_1 est l'ensemble solution de la première inéquation et S_2 celui de la seconde inéquation, alors, l'ensemble des solutions du système est l'ensemble $S = S_1 \cap S_2$.
(Faire une représentation graphique sur une droite graduée)

a) $\begin{cases} x+8<10 \\ -5x+10<5 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ -5x<-5 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>1 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$S_1 =]-\infty ; 2[$, $S_2 =]1 ; +\infty[$, $S = S_1 \cap S_2 =]1 ; 2[$

b) $\begin{cases} x+8<10 \\ x+2>6 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>4 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$S_1 =]-\infty ; 2[$, $S_2 =]4 ; +\infty[$, $S = S_1 \cap S_2 = \varnothing$ (le système n'a aucune solution)

4) Résoudre graphiquement dans un repère (O ; I, J) l'inéquation à deux inconnues

Lien avec le cours de seconde :

Cet exercice est une application de plusieurs notions vues en cours d'année
* $(x ; y)$ sont les coordonnées d'un point dans un repère.
Tout couple $(x ; y)$ solution d'une équation ou d'une inéquation peut être représenté par un point.

** Si f est une fonction représentée graphiquement par une courbe C_f alors une équation de la courbe est $y = f(x)$.
Autrement dit : les coordonnées $(x ; y)$ des points de C_f représentent les solutions de l'équation à deux inconnues $y = f(x)$.

*** Un point $M(x ; y)$ du plan dans le repère peut-être au-dessus de la courbe C_f. En ce cas : $y > f(x)$
Autrement dit : les coordonnées $(x ; y)$ des points **au-dessus** de C_f représentent les solutions de l'inéquation à deux inconnues $y > f(x)$.

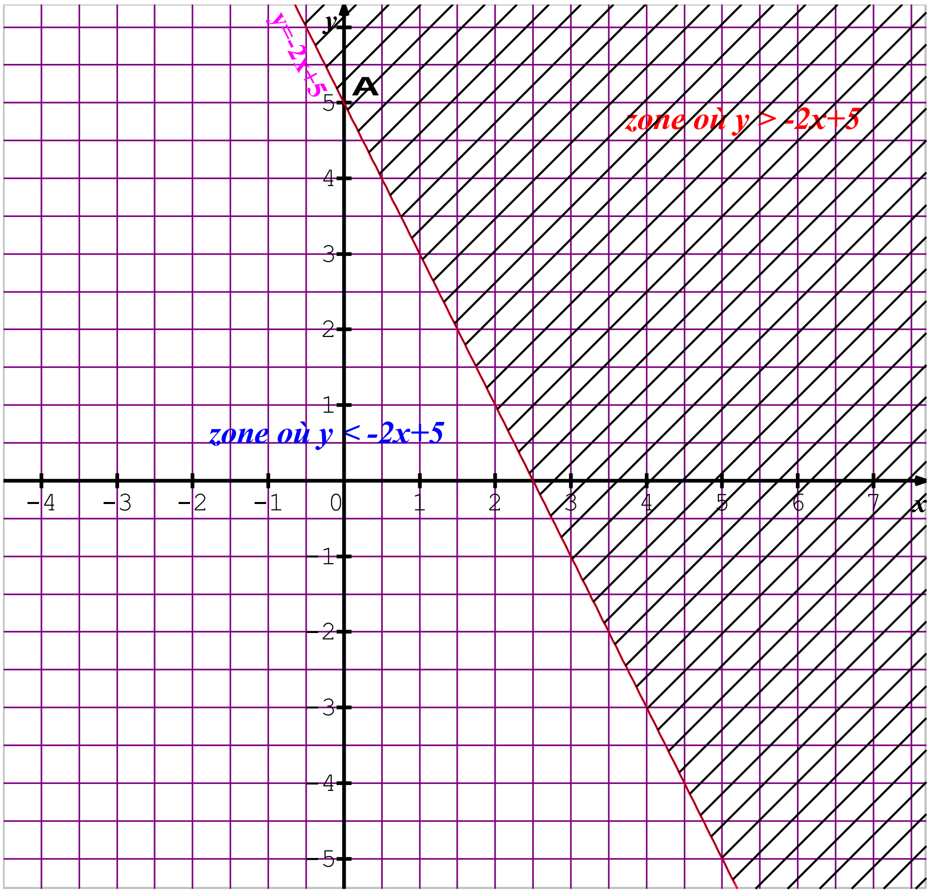
****
Un point $M(x ; y)$ du plan dans le repère peut-être au-dessous de la courbe C_f. En ce cas : $y < f(x)$
Autrement dit : les coordonnées $(x ; y)$ des points **au-dessous** de C_f représentent les solutions de l'inéquation à deux inconnues $y < f(x)$.

a) $2x + y - 5 > 0 \Leftrightarrow y > -2x + 5$

La fonction $x \mapsto -2x + 5$

est représentée par la droite d_1 passant par le point $A(0 ; 5)$ et de coefficient directeur -2.

L'ensemble des solutions de $2x + y - 5 > 0$ est représenté par les points situés au-dessus de la droite d_1 .

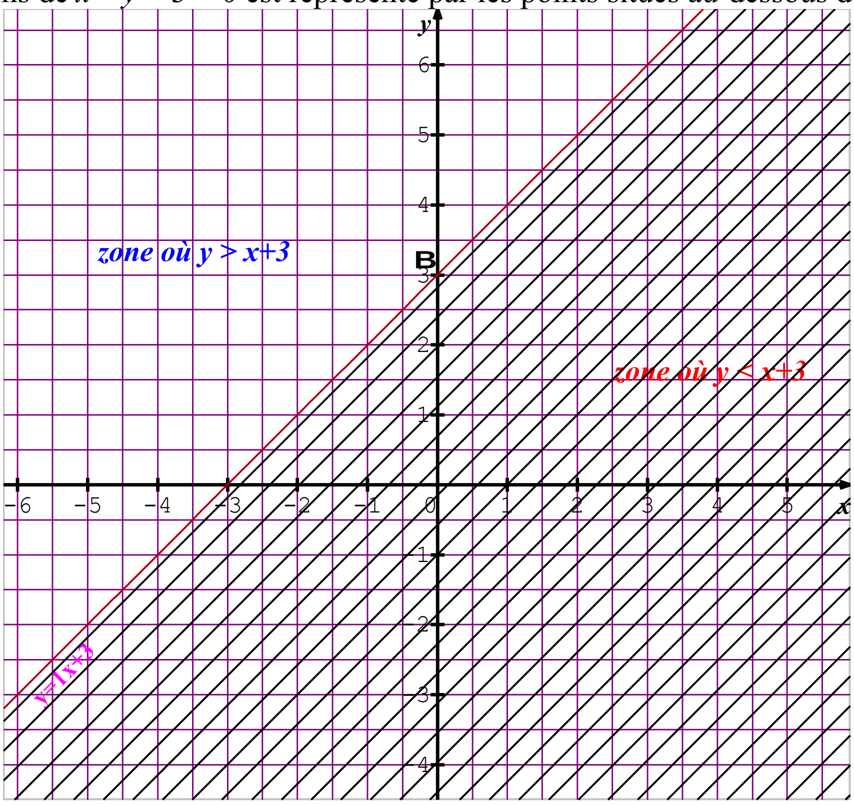


b) $x - y + 3 > 0 \Leftrightarrow y < x + 3$

La fonction $x \mapsto x + 3$

est représentée par la droite d_2 passant par le point B(0 ; 3) et de coefficient directeur 1.

L'ensemble des solutions de $x - y + 3 > 0$ est représenté par les points situés au-dessous de la droite d_2 .



II- Inéquations produits ou quotients

Résoudre l'inéquation

Rappel du cours :

Ne pas développer car on obtient une expression du second degré et, en seconde, on n'a pas les outils nécessaires à l'étude du signe de $ax^2 + bx + c$

mais chercher la **forme factorisée** pour faire un tableau de signes qui permet de **comparer à 0**.

a) $(x + 5)(x - 2) > 0$

$(x + 5)(x - 2)$ est le produit de deux facteurs du premier degré.

On étudie le signe de chacun des facteurs $x + 5$ et $x - 2$

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$x-2$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$(x+5)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Solution :

$(x + 5)(x - 2) > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty\ ; -5[\cup]2\ ; +\infty[$

b) $\dfrac{x+5}{x-2} > 0$

$\dfrac{x+5}{x-2}$ est le quotient de deux facteurs du premier degré. (2 est exclu).

On étudie le signe de chacun des facteurs $x + 5$ et $x - 2$

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$x-2$		$-$	$\vdots$	$-$	$\|$	$+$	
$\dfrac{x+5}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Solution :

$\dfrac{x+5}{x-2} > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty\ ; -5[\cup]2\ ; +\infty[$

c) $\dfrac{x+5}{x-2} > 2$ (2 est exclu).

On commence par ramener à une comparaison à 0 …. et on met au même dénominateur pour avoir le quotient de deux facteurs du premier degré …

$$\frac{x+5}{x-2} > 2 \Leftrightarrow \frac{x+5}{x-2} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{x+5-2(x-2)}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x+9}{x-2} > 0$$

On étudie le signe de chacun des facteurs $-x + 9$ et $x - 2$

x	$-\infty$		2		9		$+\infty$
$9-x$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	$\Vert$	$+$	$\vdots$	$+$	
$\dfrac{9-x}{x-2}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Solution :
$\dfrac{x+5}{x-2} > 2$ si et seulement si $x \in \,]2\,;\,9[$

d) $-2(x+5)(3-x) > 0$

$-2(x+5)(3-x)$ est le produit de trois facteurs,

le facteur -2 est toujours négatif,

on étudie le signe de chacun des facteurs $x+5$ et $3-x$.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
-2		$-$	$\vdots$	$-$	$\vdots$	$-$	
$x+5$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$3-x$		$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	
$-2(x+5)(3-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Solution :
$-2(x+5)(3-x) > 0$ si et seulement si $x \in \,]-\infty\,;\,-5[\, \cup \,]3\,;\,+\infty[$

e) $(x+5)(3-x) > (x+5)(4-2x)$

On commence par ramener à une comparaison à 0 …. et on factorise pour avoir le produit de deux facteurs du premier degré …

$(x+5)(3-x) > (x+5)(4-2x) \Leftrightarrow (x+5)(3-x) - (x+5)(4-2x) > 0$ $\quad$ $(x+5)$ est un **facteur commun**

$(x+5)(3-x) - (x+5)(4-2x) > 0 \Leftrightarrow (x+5)[(3-x)-(4-2x)] > 0$ $\quad$ réduction dans les [ ]

$(x+5)[(3-x)-(4-2x)] > 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-1) > 0$

on étudie le signe de chacun des facteurs $x+5$ et $x-1$.

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$(x+5)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Solution :
$(x+5)(3-x) > (x+5)(4-2x)$ si et seulement si $x \in \,]-\infty\,;\,-5[\, \cup \,]1\,;\,+\infty[$

f) $(x + 1)^2 - 4 > 0$

on factorise pour avoir le produit de deux facteurs du premier degré …

$(x + 1)^2 - 4 > 0$ On reconnaît la différence des carrés de … et de …

$(x + 1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x + 1 - 2)(x + 1 + 2) > 0$ On réduit dans les ( )

$(x + 1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) > 0$

on étudie le signe de chacun des facteurs $x - 1$ et $x + 3$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$(x+3)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Solution :

$(x + 1)^2 - 4 > 0$ si et seulement si $x \in \,]-\infty \, ; -3[\, \cup \,]1 \, ; +\infty[$

g) $(x + 1)^2 > (2x - 3)^2$

On ramène à une comparaison à 0.

$(x + 1)^2 > (2x - 3)^2$

On peut :

soit retrancher le membre de droite	*soit retrancher le membre de gauche*
$(x + 1)^2 - (2x - 3)^2 > 0$	$(2x - 3)^2 - (x + 1)^2 < 0$
dans les deux cas, on reconnaît la différence des carrés de $(x + 1)$ et de $(2x - 3)$, d'où,	
$[(x + 1) - (2x - 3)][(x + 1) + (2x - 3)] > 0$	$[(2x - 3) - (x + 1)][(2x - 3) + (x + 1)] < 0$
on réduit dans les crochets	
$(-x + 4)(3x - 2) > 0$	$(x - 4)(3x - 2) < 0$
On peut maintenant établir un tableau de signes, puisqu'on a des inéquations produits avec comparaison à 0.	

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
$-x + 4$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x - 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-x+4)(2x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
$x - 4$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x - 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-4)(2x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Comme on cherche les réels x tels que : $(-x + 4)(3x - 2) > 0$ (signe + à la dernière ligne), on lit : $S = \left]\frac{2}{3} ; 4\right[$	*Comme on cherche les réels x tels que : $(x - 4)(3x - 2) < 0$ (signe – à la dernière ligne), on lit :* $S = \left]\frac{2}{3} ; 4\right[$

FACTORISER :

c'est mettre l'expression algébrique sous forme d'un produit de facteurs …..

Les techniques de factorisation actuellement en seconde :

*** ***Reconnaître un facteur commun*** : c'est savoir utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition : $ka + kb = k(a + b)$.

Vocabulaire :

on décrit l'expression en utilisant les mots : somme, termes, produit, facteur.

Exemple :

$(x + 5)(3 - x) - (x + 5)(4 - 2x)$ est la somme des deux termes : $(x + 5)(3 - x)$ et $-(x + 5)(4 - 2x)$.

$(x + 5)(3 - x)$ est le produit des deux facteurs $(x + 5)$ et $(3 - x)$

$(x + 5)(4 - 2x)$ est le produit des deux facteurs $(x + 5)$ et $(4 - 2x)$

le facteur $(x + 5)$ est donc un facteur commun aux deux termes de la somme.

$(x + 5)(3 - x) - (x + 5)(4 - 2x) = (x + 5)[(3 - x) - (4 - 2x)]$

On réduit ensuite dans les […].

*** ***reconnaître la différence de deux carrés*** : c'est savoir utiliser l'égalité $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Vocabulaire :

on décrit l'expression en utilisant les mots : différence, carré de, … ,

Exemple :

$(x + 1)^2 - (2x - 3)^2$ est la différence du carré de $(x + 1)$ et du carré de $(2x - 3)$

$(x + 1)^2 - (2x - 3)^2 = [(x + 1) + (2x - 3)][(x + 1) - (2x - 3)]$
et, on réduit dans les […]