Seconde	**Intersection de droites et systèmes d'équations à deux inconnues**

Objectifs :

*** Prendre des initiatives ….

*** Entretenir les connaissances sur les équations de droites (fonctions affines et ou vecteurs)

*** Entretenir la résolution de systèmes d'équations à deux inconnues

Avertissement : La lecture graphique n'est pas une preuve (mais peut être un outil indispensable pour bâtir le raisonnement).

Dans chacun des cas suivants, **<u>étudier</u>** l'intersection des droites (AB) et (CD).

1) A(1 ; 3), B(3 ; 1), C(–3 ; –1), D (5 ; 3)

2) A(–2 ; 3), B(4 ; 2), C(–4 ; –1), D(8 ; –1)

3) A(–2 ; –1), B(10 ; 2), C $\left(-15;-\frac{17}{4}\right)$; D $\left(60;\frac{29}{2}\right)$.

4) A(1 ; 3), B(1 ; 15), C(–3, –1), D(5 ; 3)

5) A(–2 ; –1), B(10 ; 2), C(1, 3), D(5, 4)

Retenir :

1) On connaît une équation d'une courbe C_1 dans un repère.

Autrement dit : on connaît une relation entre les deux coordonnées d'un point quelconque de la courbe C_1 .

Exemple : C_1 est la courbe définie dans un repère par l'équation $x^2 + y^2 = 4$

Le point $A(0;2)$ est un point de C_1 , car, $0^2 + 2^2 = 4$

Le point $B(1;3)$ n'est pas un point de C_1 , car, $1^2 + 3^2 = 10$

Le point $C(\sqrt{2};\sqrt{2})$ est un point de C_1 , car, $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2 = 4$

Le point $D(\sqrt{3};1)$ est un point de C_1 , car, $(\sqrt{3})^2+1^2 = 4$

….

2) On connaît deux courbes C_1 et C_2 par leurs équations dans un repère.

Étudier l'intersection des deux courbes, c'est rechercher l'ensemble des points communs aux deux courbes.
Les coordonnées des points d'intersection sont les solutions du système formé par les deux équations.

Exemples :

1) C_1 d'équation $x^2 + y^2 = 4$ et C_2 d'équation $y = 2x - 2$

On pose le système : $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=2x-2 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

En remplaçant y par $2x - 2$ dans l'équation (1), on a : $x^2 + (2x - 2)^2 = 4$

Après développement, réorganisation, … il vient : $x^2 + 4x^2 - 8x + 4 = 4$

$5x^2 - 8x = 0$

$x(5x - 8) = 0$, donc, $x = 0$ et $x = \dfrac{8}{5}$.

Comme $y = 2x - 2$, on calcule les ordonnées : $y = 2\times0 - 2 = -2$ et $y = 2\times\dfrac{8}{5} - 2 = \dfrac{16-10}{5} = \dfrac{6}{5}$.

On obtient deux points A et B d'intersection entre C_1 et C_2

Soit $A(0\,;-2)$ et $B\left(\dfrac{8}{5};\dfrac{6}{5}\right)$

$C_1 \cap C_2 = \{A, B\}$

2) C_1 d'équation $x^2 + y^2 = 4$ et C_3 d'équation $y = \sqrt{3}\,x + 4$

On pose le système : $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=\sqrt{3}\,x+4 \end{cases} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

En remplaçant y par $\sqrt{3}\,x + 4$ dans l'équation (1), on a : $x^2 + (\sqrt{3}\,x + 4)^2 = 4$

Après développement, réorganisation, … il vient : $x^2 + 3x^2 + 8\sqrt{3}\,x + 16 = 4$

$4x^2 + 8\sqrt{3}\,x + 12 = 0$

$x^2 + 2\sqrt{3}\,x + 3 = 0$ soit $(x+\sqrt{3})^2 = 0$, $x = -\sqrt{3}$

Comme $y = \sqrt{3}\,x + 4$, on calcule l'ordonnée : $y = \sqrt{3}\times(-\sqrt{3})+4 = -3 + 4 = -1$

on obtient un unique point C d'intersection entre C_1 et C_3

Soit $C(-\sqrt{3};1)$

$C_1 \cap C_3 = \{C\}$

3) C_1 d'équation $x^2 + y^2 = 4$ et C_4 d'équation $y = x + 4$

On pose le système : $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=x+4 \end{cases} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

En remplaçant y par $x + 4$ dans l'équation (1), on a : $x^2 + (x + 4)^2 = 4$

Après développement, réorganisation, … il vient : $x^2 + x^2 + 8x + 16 = 4$

$2x^2 + 8x + 12 = 0$

$x^2 + 4x + 6 = 0$ $\qquad x^2 + 4x + 4 + 2 = 0$

$(x + 2)^2 + 2 = 0$

Cette somme n'est jamais nulle.

Il n'existe aucun point commun à C_1 et C_4.

$C_1 \cap C_4 = \emptyset$.