Objectifs :

*** Prendre des initiatives ….

*** Entretenir les connaissances sur les équations de droites (fonctions affines et ou vecteurs)

*** Entretenir la résolution de systèmes d'équations à deux inconnues

Avertissement : La lecture graphique n'est pas une preuve (mais peut être un outil indispensable pour bâtir le raisonnement).

Dans chacun des cas suivants, **étudier** l'intersection des droites (AB) et (CD).

1) A(1 ; 3), B(3 ; 1), C(–3 ; –1), D (5 ; 3)

On cherche une équation de (AB) et une équation de (CD).

Méthodes : voir § après les résultats sur les méthodes.

Une ***équation*** de (AB) : $y = -x + 4$

Une ***équation*** de (CD) : $y = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ (Coefficient directeur : $a = \frac{3-(-1)}{5-(-3)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ et $b = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$)

Intersection des droites :

Les coefficients directeurs –1 et $\frac{1}{2}$ sont différents, donc, les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point I.

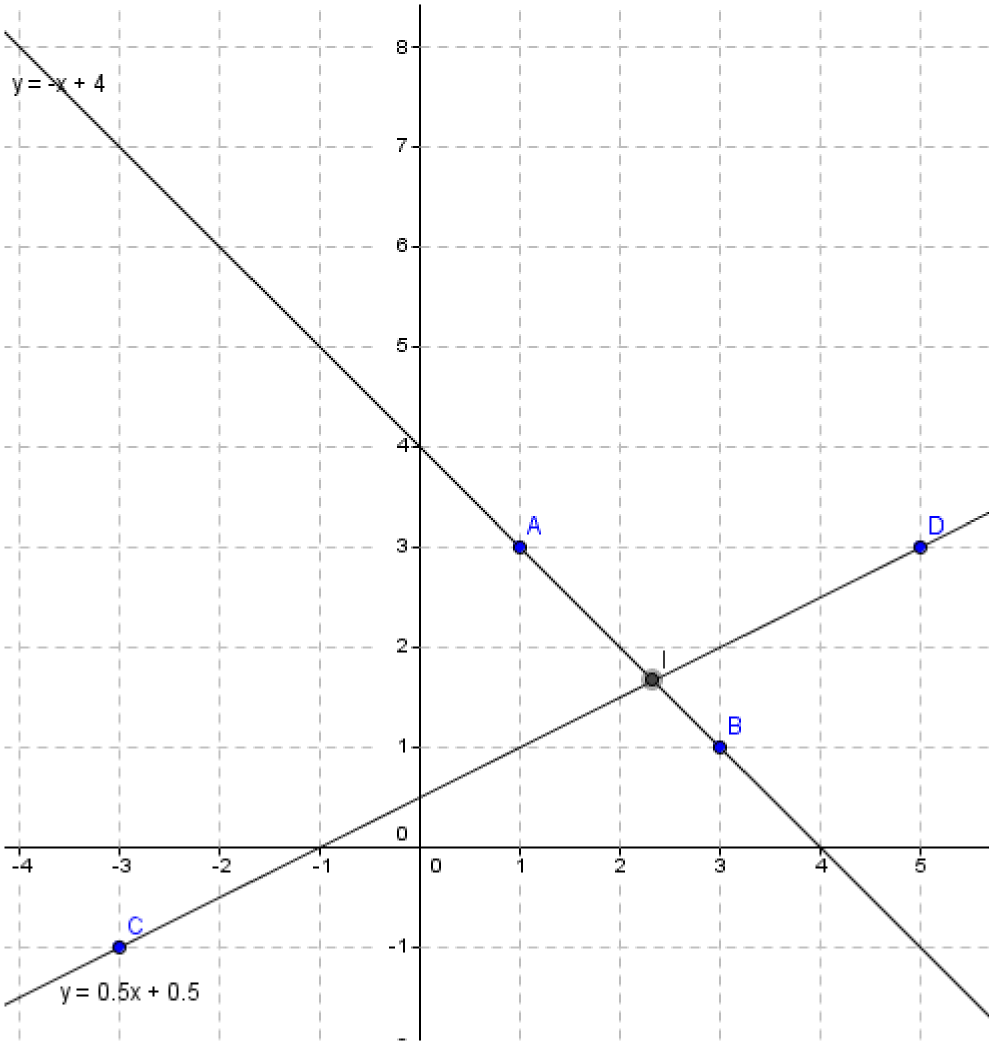
Un point appartient aux deux droites si et seulement si ses coordonnées sont solutions du système :

Les coordonnées de I sont les solutions de $\begin{cases} y=-x+4 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases}$, on en déduit par comparaison : $-x + 4 = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Après résolution de cette équation : $x = \frac{7}{3}$ et $y = -\frac{7}{3}+4 = \frac{5}{3}$

Les deux droites sont sécantes au point $I\left(\frac{7}{3};\frac{5}{3}\right)$.

(Voir figure en-dessous) :



2) A(–2 ; 3), B(4 ; 2), C(–4 ; –1), D(8 ; –1)

Une ***équation*** de (AB) : $y = -\frac{1}{6}x + \frac{8}{3}$

Les points C et D ont la même ordonnée : $y_C = y_D = -1$

Tous les points de (CD) ont pour ordonnée –1.

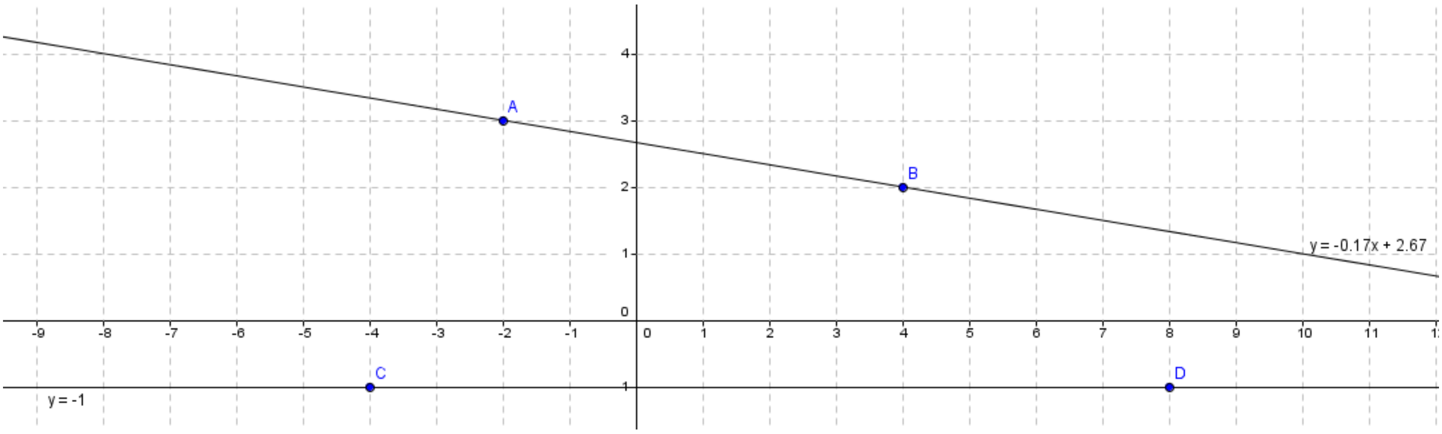
Une ***équation*** de la droite (CD) est : $y = -1$

Les coordonnées de I sont les solutions de $\begin{cases} y = -1 \\ y = -\frac{1}{6}x + \frac{8}{3} \end{cases}$, on en déduit par comparaison : $-1 = -\frac{1}{6}x + \frac{8}{3}$

Après résolution de cette équation : $x = 22$.

Les deux droites sont sécantes au point $\mathrm{I}(22; -1)$.

(Voir figure en-dessous) :



3) A(–2 ; –1), B(10 ; 2), C $\left(-15;-\frac{17}{4}\right)$; D $\left(60;\frac{29}{2}\right)$.

Une équation de (AB) : $y = \frac{2-(-1)}{10-(-2)}x + b = \frac{1}{4}x + b$.

$b = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

Une ***équation de (AB)*** : $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

Une équation de (CD) : Coefficient directeur de (CD) : $a = \frac{\frac{29}{2}-\left(\frac{-17}{4}\right)}{60-(-15)} = \frac{\frac{75}{4}}{75} = \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{4}x + b$, $b = -\frac{17}{4} + \frac{15}{4} = -\frac{1}{2}$.

Une ***équation de (CD)*** : $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

Les deux droites sont **confondues** car elles ont le même coefficient directeur et des ordonnées à l'origine égales.

4) A(1 ; 3), B(1 ; 15), C(–3, –1), D(5 ; 3)

Une équation de (AB) :

Les points A et B ont la même abscisse : $x_A = x_B = 1$.

Tous les points de la droite (AB) ont la même abscisse : 1

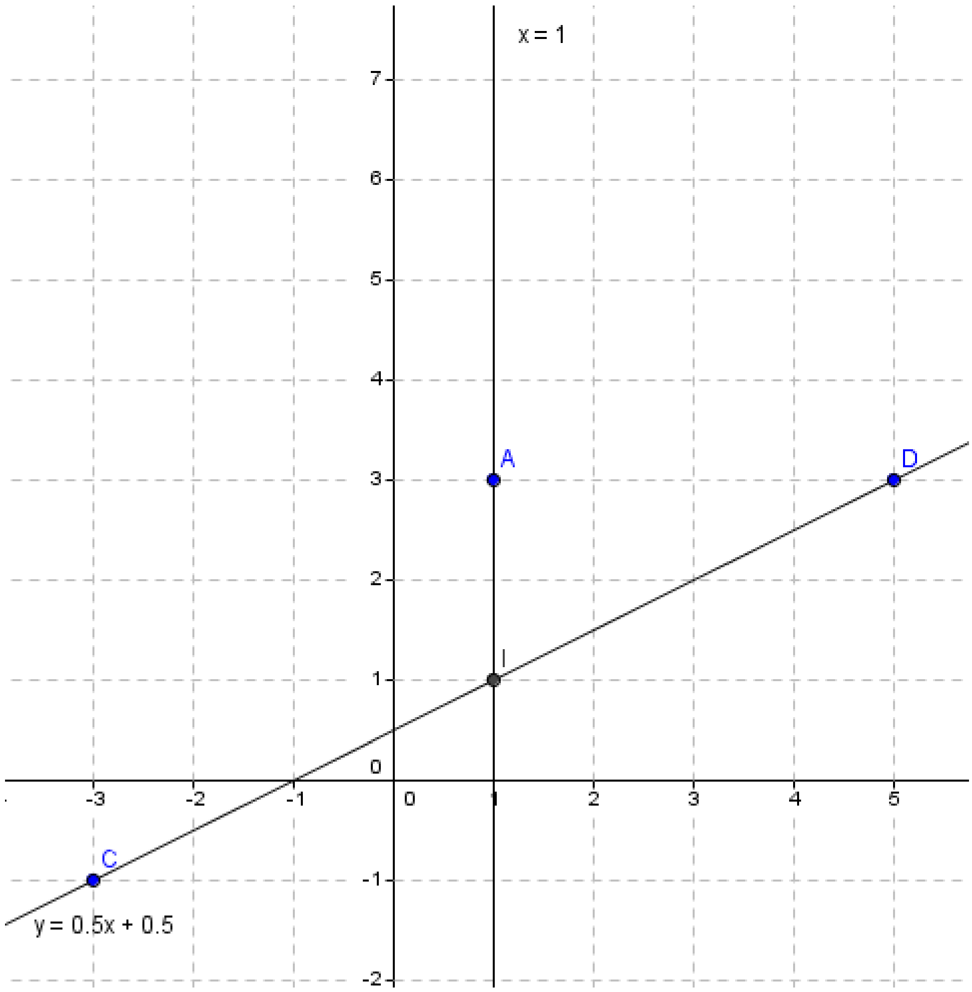
Une ***équation*** de (AB) : $x = 1$.

Une équation de (CD) : $y = \frac{3-(-1)}{5-(-3)}x + b = \frac{1}{2}x + b$, et, $b = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$. (Voir 1))

Une ***équation*** de (CD) : $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Les coordonnées de I sont les solutions de $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases}$, soit : $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Les deux droites sont sécantes au point $\mathrm{I}(1\,;1)$.



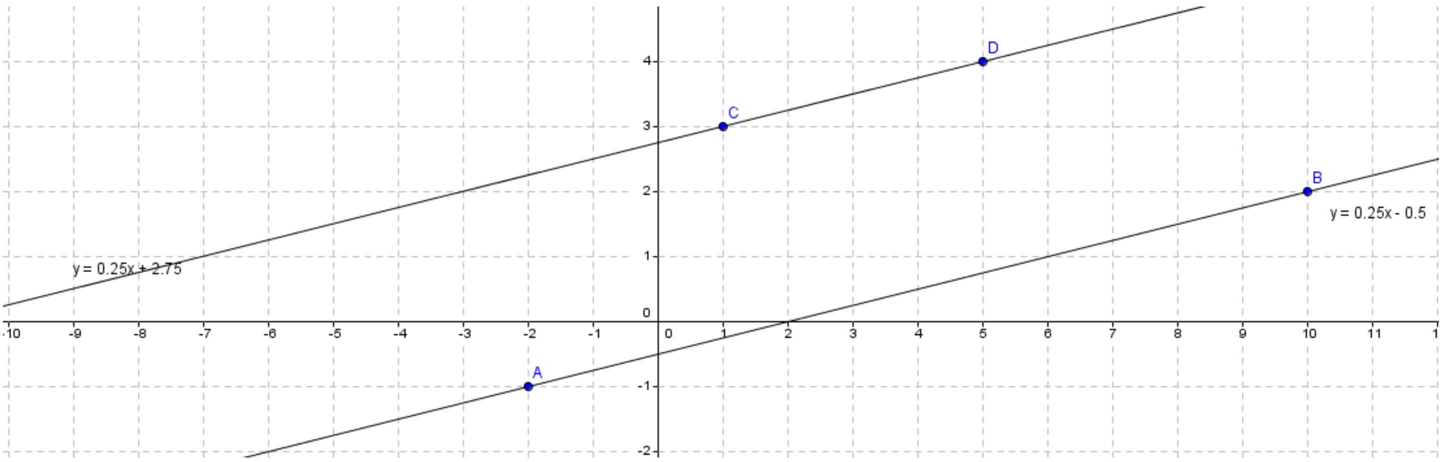
5) A(–2 ; –1), B(10 ; 2), C(1, 3), D(5, 4)

Une équation de (AB) : $y = \frac{2-(-1)}{10-(-2)}\ x + b = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$. (voir le 3))

Une équation de (CD) : $y = \frac{4-3}{5-1}x + b = \frac{1}{4}x + b$, et, $b = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

Une ***équation de (CD)*** : $y = \frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$

Les deux droites sont strictement parallèles car elles ont le même coefficient directeur et des ordonnées à l'origine différentes.



Retenir :

Méthodes pour déterminer une équation de droites connaissant les coordonnées de deux points . (Chapitres : Fonctions affines et vecteurs colinéaires)

I- La droite est représentative d'une fonction affine.

On peut écrire l'équation sous la forme $y = ax + b$

Détermination de a et b : ***Soient les points*** **A(1 ; 3), B(3 ; 1)**

*** Avec un système :

Les coordonnées de A vérifient l'équation d'où : $3 = 1\times a + b$.

Les coordonnées de B vérifient l'équation d'où : $1 = 3\times a + b$.

On obtient le système : $\begin{cases} a+b=3 \\ 3a+b=1 \end{cases}$

Par différence, il vient : $2a = -2$, soit : $a = -1$ et $b = 3 - (-1) = 4$

Une équation de (AB) : $y = -x + 4$

*** En appliquant la " formule " : le coefficient directeur $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-3}{3-1} = -1$

On a alors : $y = -x + b$.

Comme $A \in (AB)$, $3 = -1 + b$, soit : $b = 4$.

Une équation de (AB) : $y = -x + 4$

II- Avec les vecteurs colinéaires : ***Soient les points*** **A(1 ; 3), B(3 ; 1)**

Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Un point $M(x ; y) \in (AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

On a donc : $-2(x - 1) = 2(y - 3)$, soit : $y = -x + 4$

Une équation de (AB) : $y = -x + 4$

Retenir : Qu'est-ce qu'une équation de courbe ? Comment déterminer l'intersection de deux courbes ?

1) On connaît une équation d'une courbe C_1 dans un repère.

Autrement dit : on connaît une relation entre les deux coordonnées d'un point quelconque de la courbe C_1 .

Exemple : C_1 est la courbe définie dans un repère par l'équation $x^2 + y^2 = 4$

Le point $\mathrm{A}(0;2)$ est un point de C_1 , car, $0^2 + 2^2 = 4$

Le point $B(1;3)$ n'est pas un point de C_1 , car, $1^2 + 3^2 = 10$

Le point $C(\sqrt{2};\sqrt{2})$ est un point de C_1 , car, $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2 = 4$

Le point $D(\sqrt{3};1)$ est un point de C_1 , car, $(\sqrt{3})^2+1^2 = 4$

….

2) On connaît deux courbes C_1 et C_2 par leurs équations dans un repère.

Étudier l'intersection des deux courbes, c'est rechercher l'ensemble des points communs aux deux courbes.
Les coordonnées des points d'intersection sont les solutions du système formé par les deux équations.
Exemples :
1) C_1 d'équation $x^2 + y^2 = 4$ et C_2 d'équation $y = 2x - 2$
On pose le système : $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=2x-2 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
En remplaçant y par $2x - 2$ dans l'équation (1), on a : $x^2 + (2x - 2)^2 = 4$
Après développement, réorganisation, … il vient : $x^2 + 4x^2 - 8x + 4 = 4$
$5x^2 - 8x = 0$
$x(5x - 8) = 0$, donc, $x = 0$ et $x = \frac{8}{5}$.
Comme $y = 2x - 2$, on calcule les ordonnées : $y = 2\times0 - 2 = -2$ et $y = 2\times\frac{8}{5}$ - 2 = $\frac{16-10}{5}$ = $\frac{6}{5}$.
On obtient deux points A et B d'intersection entre C_1 et C_2
Soit $A(0 ; -2)$ et $B\left(\frac{8}{5};\frac{6}{5}\right)$
$C_1 \cap C_2 = \{A, B\}$

2) C_1 d'équation $x^2 + y^2 = 4$ et C_3 d'équation $y = \sqrt{3}\,x + 4$
On pose le système : $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=\sqrt{3}\,x+4 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
En remplaçant y par $\sqrt{3}\,x + 4$ dans l'équation (1), on a : $x^2 + (\sqrt{3}\,x + 4)^2 = 4$
Après développement, réorganisation, … il vient : $x^2 + 3x^2 + 8\sqrt{3}\,x + 16 = 4$
$4x^2 + 8\sqrt{3}\,x + 12 = 0$
$x^2 + 2\sqrt{3}\,x + 3 = 0$ soit $(x+\sqrt{3})^2 = 0$, $x = -\sqrt{3}$
Comme $y = \sqrt{3}\,x + 4$, on calcule l'ordonnée : $y = \sqrt{3}\times(-\sqrt{3})+4 = -3 + 4 = -1$
on obtient un unique point C d'intersection entre C_1 et C_3
Soit $C(-\sqrt{3};1)$

$C_1 \cap C_3 = \{C\}$

3) C_1 d'équation $x^2 + y^2 = 4$ et C_4 d'équation $y = x + 4$

On pose le système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + 4 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

En remplaçant y par $x + 4$ dans l'équation (1), on a : $x^2 + (x + 4)^2 = 4$

Après développement, réorganisation, … il vient : $x^2 + x^2 + 8x + 16 = 4$

$2x^2 + 8x + 12 = 0$

$x^2 + 4x + 6 = 0$ $\quad$ $x^2 + 4x + 4 + 2 = 0$

$(x + 2)^2 + 2 = 0$

Cette somme n'est jamais nulle.

Il n'existe aucun point commun à C_1 et C_4.

$C_1 \cap C_4 = \emptyset$.