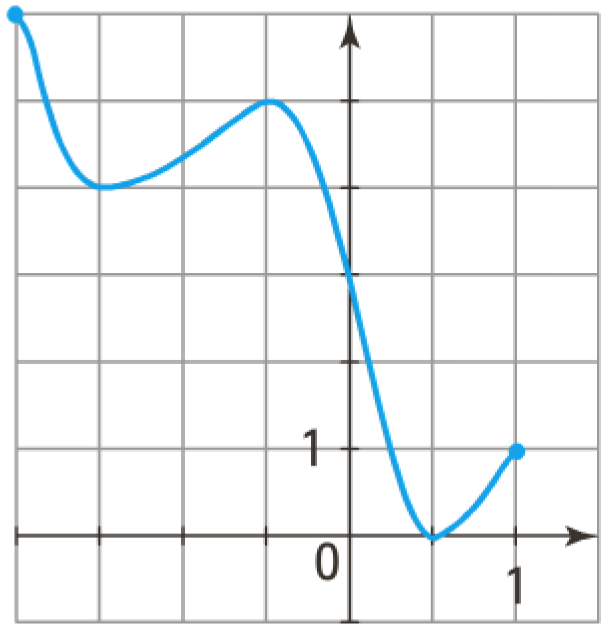
Index

4 page 46



1) Le maximum de *f* est 6 (On le lit en ordonnée).

Ce maximum est atteint en –2

Le minimum de *f* est 0 (On le lit en ordonnée).

Ce minimum est atteint en $\frac{1}{2}$.

La fonction *f* est strictement décroissante sur [–2; –1,5] et sur [–0,5; 0,5]

La fonction *f* est strictement croissante sur [–1,5; –0,5] et sur [0,5; 1]

2) Tableau de variations:

x	–2		–1,5		–0,5		0,5		1
$f(x)$	6	↘	4	↗	5	↘	0	↗	1

Compléments:

Si $-2 \leqslant x \leqslant 1$ alors $0 \leqslant f(x) \leqslant 6$ (l'image $f(x)$ est comprise entre le minimum et le maximum)

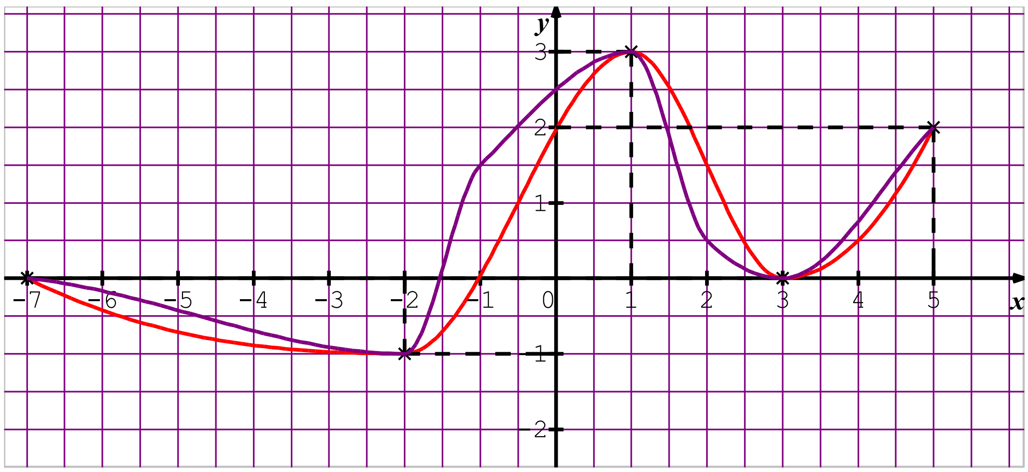
Si $-1{,}5 \leqslant x \leqslant 0{,}5$ alors $0 \leqslant f(x) \leqslant 5$, car, sur l'intervalle [–1,5; 0,5], le minimum est 0 et le maximum est 5.

7 page 46

x	–7		–2		1		3		5
$f(x)$	0	↘	–1	↗	3	↘	0	↗	2

Les représentations graphiques passent par les points A(–7 ; 0), B(–2 ; –1), C(1 ; 3), D(3 ; 0) ; E(5 ; 2)

et doivent respecter les variations sur chacun des intervalles ;



2) La fonction f est décroissante sur [–7 ; –2], sur [1 ; 3].

La fonction f est croissante sur [–2 ; 1], sur [3;5].

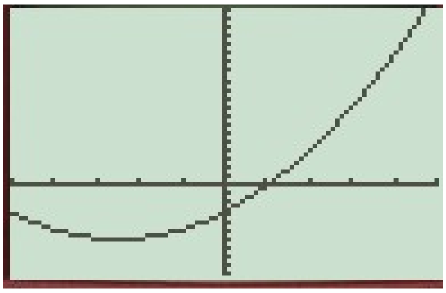
3) Le maximum de f est 3 atteint en 1

Le minimum de f est –1 atteint en –2

10 page 47

On entre dans le menu des fonctions de la calculatrice Y1=(X-1)(0.5X+3)

Dans le menu " fenêtre " Xmin=-5 (*signe(-)*) Xmax=5, Ymin=-10 (*signe(-)*), Ymax=20



Le minimum semble valoir : –6,125 atteint en –2,5 (toute valeur proche est acceptable)

Le maximum n'apparaît pas … il semble être atteint en 5.

Tableau de variations (on calcule $f(-5) = -6\times(0,5) = -3$ et $f(5) = 4\times5,5 = 22$ et $f(-2,5) = -6,125$

x	–5		–2,5		5
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	–3	↘	–6,125	↗	22

13 page 47

x	–7		–2		–1		1		3		5
variations de f	0	↘	–1	↗	0	↗	3	↘	0	↗	2
Signe de f (x)	0	–		–	0	+		+	0	+	

1/ $f(x) < 3$ a pour ensemble de solutions, l'ensemble $S_1 = [-7; 1[\cup]1; +5]$
2/ Si $f(-1) = 0$ alors l'inéquation $f(x) < 0$ a pour ensemble de solutions, l'ensemble: $S_2 =]-7; -1[$
3/ $f(x) > 0$ sur la réunion d'intervalles $]-1; 3[\cup]3; 5]$
$f(x) < 0$ sur l'intervalle $]-7; -1[$
$f(x) = 0$ lorsque $x \in \{-7; -1; 3\}$
Tableau de signes (Voir le tableau au-dessus : 3ème ligne)

14 page 47

Soit f une fonction telle que $f(2) = 1$ et $f(-2) = -1$.

On peut déduire de cette information :

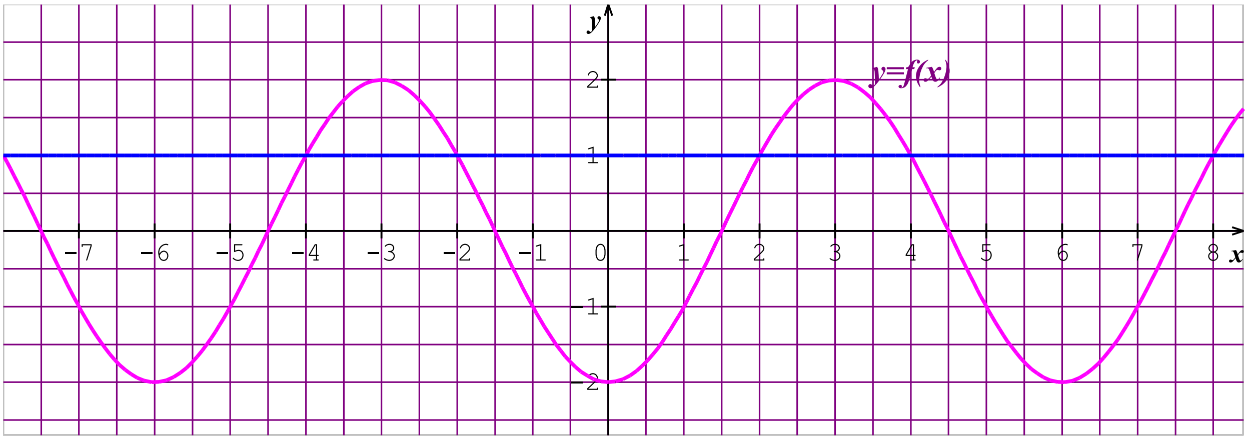
Si $x = 2$ ou $x = -2$ alors $f(x) = 1$.

La réciproque est fausse.

Si $f(x) = 1$ alors ????

Il n'y pas équivalence entre " $f(x) = 1$ " et " $x = 2$ ou $x = -2$ "

Exemple graphique :



La fonction f représentée est telle que $f(2) = 1$, $f(-2) = 1$.

Mais, l'équation $f(x) = 1$ une infinité de solutions : $x = 2$, $x = 4$, $x= 8$, $x = 10$, ..., $x = -2$, $x = -4$, $x = -8$, ...

---

15 page 47

1) " -2 est l'image de 2 par f " **Vrai**

Si $f(x) = -2$ alors $x = 2$ **FAUX** **Il existe un autre réel qui a pour image** -2

2) " 2 est l'image de -1 par f " **Vrai**

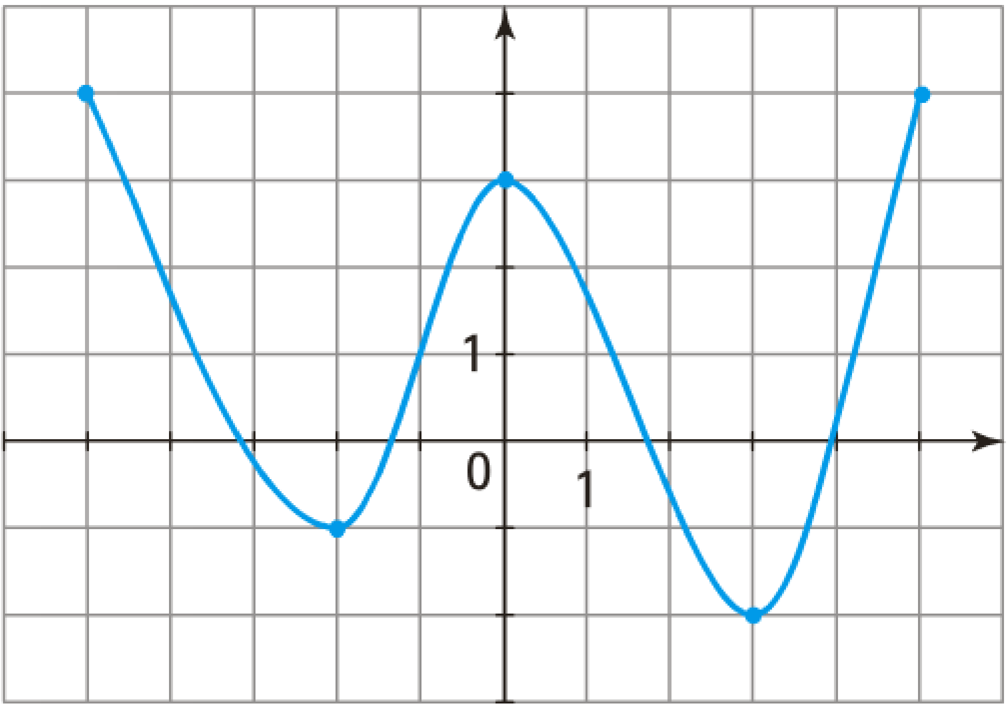
Si $f(x) = 2$ alors $x = -1$ **Vrai** (c'est le seul réel ayant pour image 2)

3) La phrase : " si $f(x) \neq 2$ alors $x \neq -1$ " est vraie

La contraposée de la phrase 3) est " Si $x = -1$ alors $f(x) = 2$ " qui est une phrase vraie.

---

32 page 49



1) **réciproque d'une implication.**

Implication (Si … alors ...)	Vrai-Faux	Réciproque	Vrai-Faux	Justification
a) Si $x = -2$ alors $f(x) = -1$	V	Ra) Si $f(x) = -1$ alors $x = -2$	F	on peut avoir deux autres valeurs possibles de x telles que $f(x) = -1$. L'équation $f(x) = -1$ a 3 solutions.
b) Si $x = 3$ alors $f(x) = -2$	V	Rb) Si $f(x) = -2$ alors $x = 3$	V	L'équation $f(x) = -2$ a une et une seule solution qui vaut 3
c) Si $x > 4$ alors $f(x) > 0$	V	Rc) Si $f(x) > 0$ alors $x > 4$	F	$f(x) > 0$ sur trois intervalles (Approximativement : $[-5 ; -3,1[\cup]-1,4 ; 1,6[\cup]3,9 ; 5]$)
d) Si $f(x) = 4$ alors $x = -5$ ou $x = 5$	V	Rd) Si $x = -5$ ou $x = 5$ alors $f(x) = 4$	V	L'équation $f(x) = 4$ a deux solutions qui sont -5 et 5
e) Si $f(x) \leqslant -2$ alors $x = 3$	V	Re) Si $x = 3$ alors $f(x) \leqslant -2$	V	$f(3) = -2$

Compléments :

Quand une implication et sa réciproque sont vraies, il est possible d'écrire une équivalence entre les deux propositions (phrases mathématiques).

On a ici au a), d) e), les équivalences suivantes :

a) $x = 3$ si et seulement si $f(x) = -2$

d) $f(x) = 4$ si et seulement si $x = -5$ ou $x = 5$

e) $f(x) \leqslant -2$ si et seulement si $x = 3$

2) **Négation d'une proposition .**

Quand une proposition est vraie, sa négation est fausse ET quand la proposition est fausse, sa négation est vraie.

Exemple : " Le manteau est rouge " est une proposition.

" Le manteau n'est pas rouge " est la négation de cette proposition.

" le manteau est vert " n'est pas la négation de la proposition " Le manteau est rouge ".

En effet : avec un manteau jaune, les deux propositions " le manteau est vert " et " le manteau est rouge " sont fausses.

Proposition	Vrai-Faux	Négation	Vrai-Faux	Justification
a) Pour tout x de $[-5 ; 5]$, $f(x) < 4$	F	Na) Il existe au moins un réel x de $[-5 ; 5]$ tel que $f(x) \geqslant 4$	V	$f(-5) = 4, f(5) = 4$ -5 et 5 sont des réels de $[-5 ; 5]$ et leurs images ne sont pas strictement inférieures à 4.
b) Pour tout x de $[-5 ; 0]$, $3 \leqslant f(x) \leqslant 4$	F	Nb) Il existe au moins un réel x de $[-5 ; 0]$ tel que $f(x) < 3$ ou $f(x) > 4$	V	par exemple : $x = -2$
c) Pour tout x de $[0 ; 5]$, $-2 \leqslant f(x) \leqslant 4$	V	Nc) Il existe au moins un réel x de $[0 ; 5]$ tel que $f(x) < -2$ ou $f(x) > 4$	F	Le minimum de f sur $[0 ; 5]$ est -2 atteint en 3 et le maximum de f sur [o ; 5] est 4 atteint en 5.

Proposition	Vrai-Faux	Négation	Vrai-Faux	Justification
d) Il existe au moins un réel x tel que $f(x) = 4$	V	Nd) Pour tout x réel, $f(x) \neq 4$	F	L'équation $f(x) = 4$ a deux solutions qui sont -5 et 5
e) On peut trouver un réel x tel que $f(x) = -3$	F	Ne) Pour tout x réel, $f(x) \neq -3$	V	L'équation $f(x) = -3$ n'a aucune solution.
f) Il existe au moins un réel x tel que $f(x) \geqslant -2$	V	Nf) Pour tout x réel, $f(x) < -2$	F	Il suffit de trouver un réel … $f(0) = 3$ 0 est un réel et $3 > -2$

34 et 35 page 49 Si ... alors ....

Les énoncés des propriétés sont sous la forme : Si (CS) alors (CN), où (CS) veut dire condition suffisante et (CN) condition nécessaire.

Exemples : Si j'ai 100 € (cela est suffisant) alors je peux payer un objet coûtant 20 €,

mais, il n'est pas nécessaire d'avoir 100 €.

Si je prends un nombre x supérieur à 3 alors (nécessairement) ce nombre est un nombre positif,

mais, je peux avoir un nombre positif qui n'est pas supérieur à 3.

Comment les étudier :

Les propositions (implications) écrites sous la forme " si ... alors .... " se démontrent (la proposition est vraie)

*** en prenant en données (ce qui est supposé certain), ce qui suit le " si " (condition suffisante)

*** et, à partir de ces données, on amène par des définitions du cours, des propriétés déjà démontrées (théorèmes) la phrase qui suit le " alors " (condition nécessaire)

(Voir le 3/ du n° 34 et le 2/ du n°35)

Contre-exemple :

Pour montrer que la proposition " si ... alors .... " est fausse, on construit un contre-exemple.

Pour cela, on donne un exemple où la condition suffisante est vraie sans avoir la condition nécessaire.

Une figure est très souvent efficace dans ces cas.

Voir les 1/, 2/ du n°34 et 1/, 3/ du n°35

Un petit rappel de vocabulaire :

Négation d'une phrase :

Quelle est la négation de la phrase : " Cet objet est rouge " ?

Pouvez-vous alors donner la couleur d'un objet qui n'est pas rouge ?

Voir le 1/ du n°34.

Réciproque :

La réciproque d'une implication s'énonce en échangeant les conditions nécessaires et suffisantes.

Exemple au 3/ du n°34

la proposition " Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors, pour tout $x < 3$, $f(x) < f(3)$" (qui est vraie)

a pour réciproque :

" Si, pour tout $x < 3$, $f(x) < f(3)$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ " (qui est une phrase fausse : voir le 3/ du n°35)

Contraposée :

La contraposée d'une implication s'énonce en prenant les négations des propositions nécessaires et suffisantes sous la forme :

Si (négation condition nécessaire) alors (négation condition suffisante).

Exemple au 3/ du n°34

la proposition " Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors, pour tout $x < 3$, $f(x) < f(3)$" (qui est vraie)

Si (condition suffisante) alors (condition nécessaire)

a pour contraposée :

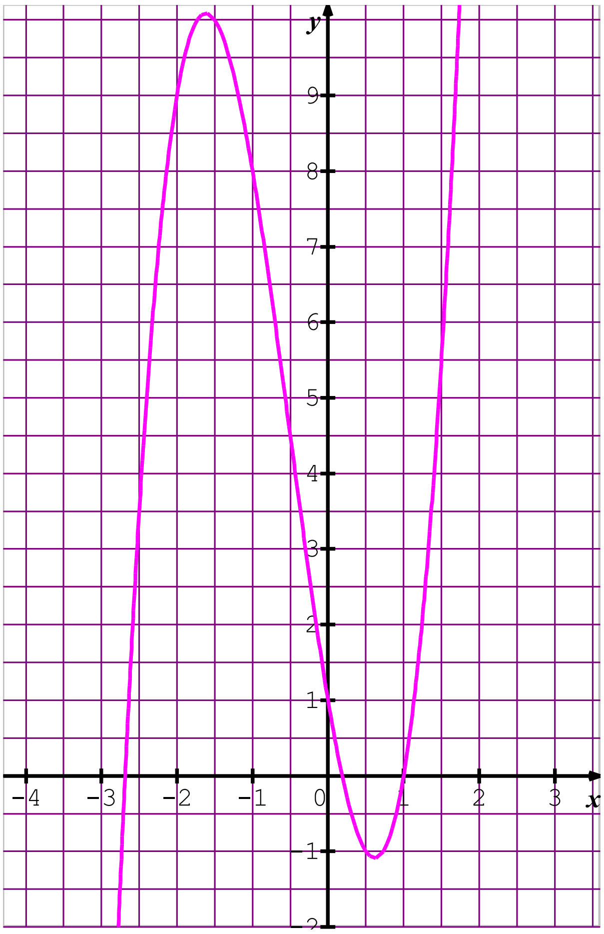
" Si, il existe au moins un $x < 3$ tel que $f(x) \geqslant f(3)$, alors f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$ " (vraie)

Si (négation condition nécessaire) alors (négation condition suffisante).

34 page 49

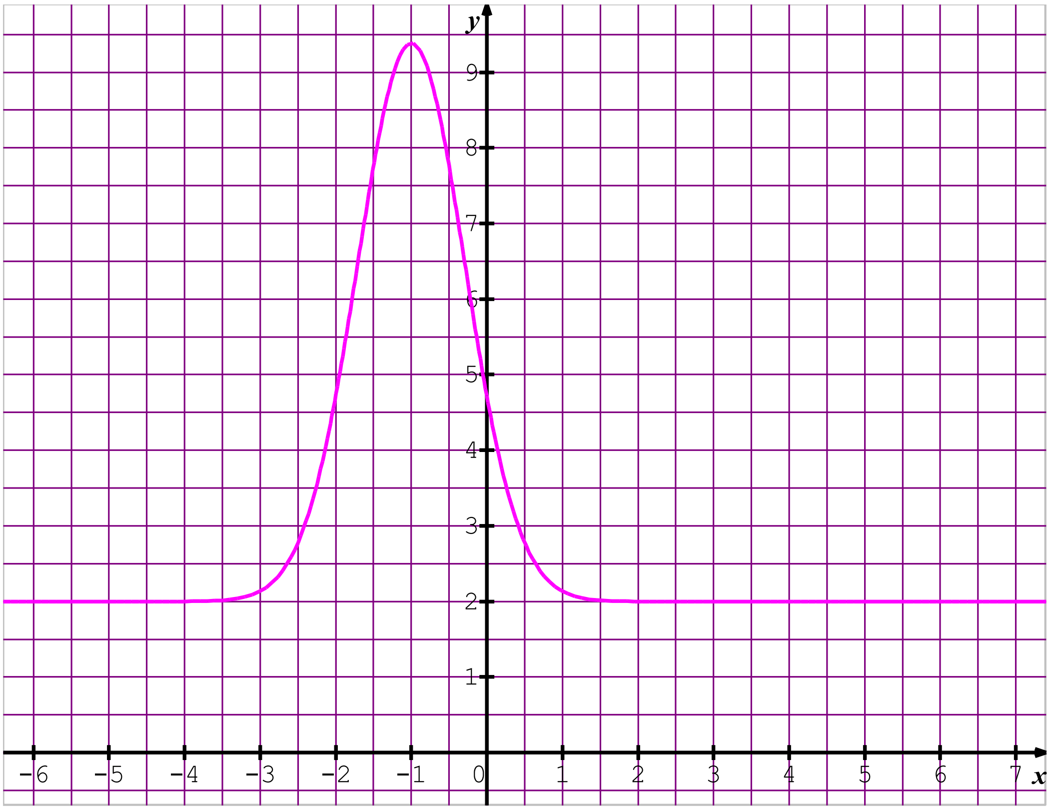
1) la proposition " si f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ alors elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ " est une phrase fausse.

Contre-exemple : Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui change de variations n'est ni croissante, ni décroissante sur $\mathbb{R}$.



2) la proposition " Si, quel que soit x réel, $f(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur ℝ " est une phrase fausse.

contre-exemple : On peut imaginer n'importe quelle fonction où toutes les valeurs images prises par la fonction sont strictement positives sans que cette fonction soit strictement croissante.



3) la proposition " Si f est strictement croissante sur ℝ , alors, pour tout $x < 3$, $f(x) < f(3)$" est une phrase vraie.

Preuve : C'est la définition d'une fonction strictement croissante qui est appliquée dans cette proposition.

Une fonction strictement croissante sur ℝ conserve l'ordre :

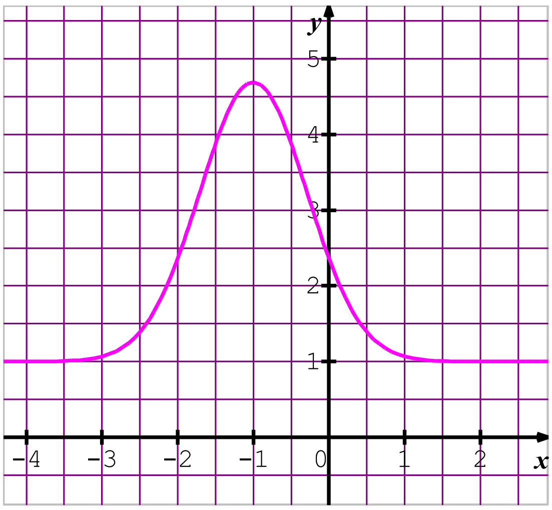
D'où : $x < 3$ implique $f(x) < f(3)$

---

35 page 50

1) la proposition " Si pour tout x réel, $f(x) \leqslant 5$, alors 5 est le maximum de f " est une phrase fausse.

Contre-exemple : La phrase est fausse car $f(x)$ peut être inférieure ou égale à 5 sans atteindre 5.



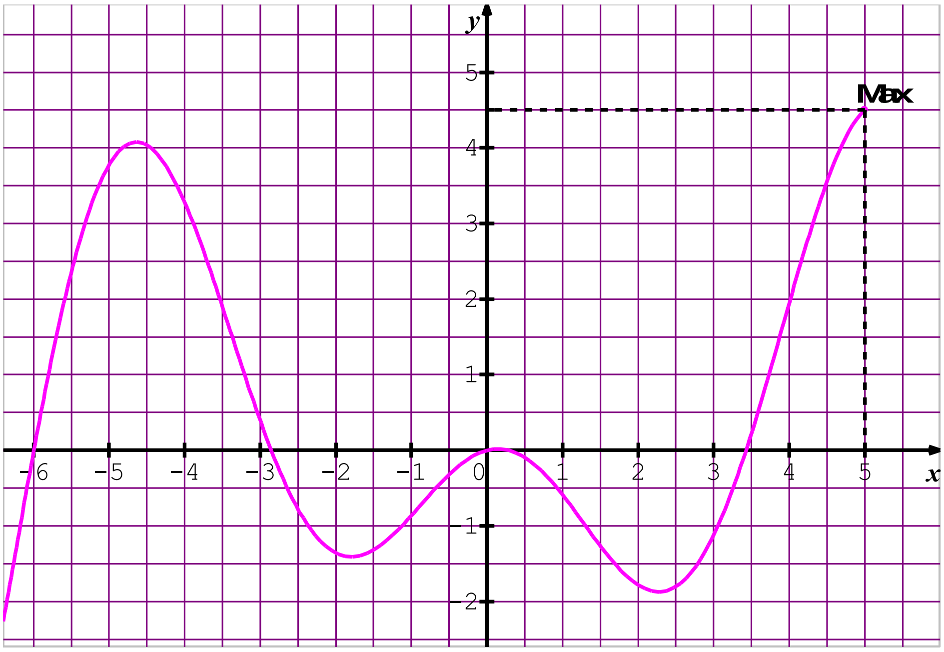
2) la proposition " Si, pour tout x réel, $f(x) \leqslant f(5)$, alors $f(5)$ est le maximum de f " est une phrase vraie.

Preuve : C'est la définition du maximum d'une fonction.

Le maximum de f est la plus grande valeur prise par la fonction.

3) la proposition " Si pour tout $x < 5$, $f(x) < f(5)$ alors, f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 5]$" est une phrase fausse.

Contre-exemple : La phrase est fausse car $f(x)$ peut être inférieure à $f(5)$ sans être monotone.



39 page 50

x	-3		0		2		5
$g(x)$	-1	↘	-2	↗	$g(2)$	↘	-3

1- Le minimum de g est -3. C'est donc nécessairement $g(5)$ d'après les autres données.

Puisque le maximum de g est -1,

le nombre image en 2, $g(2)$ ne pourra être supérieur à -1, et, il doit être supérieur à -2 $(= g(0))$.

Tout nombre a tel que $-2 < a < -1$ peut-être image de 2 par g.

2- g est strictement décroissante sur $[-3\ ;\ 0]$ et sur $[2\ ;\ 5]$

g est strictement croissante sur $[0\ ;\ 2]$.

3-a) On ne peut pas avoir $g(-1) = -2{,}1$, puisque $-2{,}1 < -2$ et que d'après la variation de g , il faut : $g(-1) > g(0)$.

b) Aline a raison.

On a déjà $g(0) = -2$.

Comme g(2) est supérieur à -2, que $g(5) = -3$, il existe une autre valeur antécédente entre 2 et 5 qui a pour image -2.

c) Voir au 1), on a montré que $-2 < g(2) < -1$

d) L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) > -3$ est $[-1 ; 5[$.

(5 est exclu car $g(5) = -3$, toutes les autres valeurs prises par la fonction g sont strictement supérieures à -3)