Index

TD1 page 121

Données :

AB = 10 km

vitesse moyenne de A à B : 60 km.h^{-1}

Vitesse moyenne de B à A : x km.h^{-1}

1) ***un cas particulier*** : x = 40 km.h^{-1}

a) Durée du trajet aller : $durée_{aller} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ h.

Durée du trajet retour : $durée_{retour} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ h.

Durée aller-retour : $\frac{1}{4}+\frac{1}{6} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$ h.

Vitesse moyenne aller-retour : $V_{moyenne} = \frac{20}{\frac{5}{12}} = \frac{20\times 12}{5}$ = 48 km.h^{-1}

La moyenne des vitesses à l'aller et au retour : $\frac{40+60}{2}$ = 50 n'est pas la vitesse moyenne du trajet complet aller-retour.

2) ***Cas général*** :

$x \in]0 ; +\infty[$

$f(x)$ est la vitesse moyenne aller-retour :

1) a)Durée du trajet aller : $durée_{aller} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ h. $t_1 = \frac{1}{6}$.

Durée du trajet retour : $durée_{retour} = \frac{10}{x} = t_2$.

Vitesse moyenne aller-retour : $f(x) = \frac{20}{\frac{1}{6}+\frac{10}{x}} = \frac{20}{\frac{x+60}{6x}} = \frac{20\times 6x}{x+60} = \frac{120x}{x+60}$

b) $f(x) = 70$ si et seulement si $\frac{120x}{x+60} = 70$, soit : $120x = 70x + 4\,200$, d'où, $x = \frac{4200}{50}$ = 84 km.h^{-1}

$f(x) = \dfrac{120\,x}{x+60} = \dfrac{120\,x-7200+7200}{x+60} = \dfrac{120(x+60)-7200}{x+60} = 120 - \dfrac{7200}{x+60}$

c) f est une fonction croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Une méthode :

Pour décrire la fonction f, on a ce " programme de calcul " $f(x) = -\ 7200\times\dfrac{1}{x+60}+120$

Prendre un réel x strictement positif,
lui ajouter 60
Prendre l'inverse de cette somme
puis, multiplier par – 7200
et, enfin, ajouter 120

$0 < a < b$ en ajoutant 60, on a :

$60 < a + 60 < b + 60$ En appliquant la **<u>fonction inverse</u>** décroissante sur $]0\,;+\infty[$,

$\dfrac{1}{60} > \dfrac{1}{a+60} > \dfrac{1}{b+60}$ En multipliant par **–7200 <u>strictement négatif</u>** :

$\dfrac{-7200}{60} < \dfrac{-7200}{a+60} < \dfrac{-7200}{b+60}$ En ajoutant 120

$0 < 120 - \dfrac{7200}{a}+60 < 120 - \dfrac{7200}{b+60}$

On a montré : si $0 < a < b$ alors $f(a) < f(b)$, ce qui prouve que : f est une fonction croissante sur $]0\,;+\infty[$.

d) Le motard ne pourra jamais atteindre et dépasser 120 km.h^{-1}.

Si x est de plus en plus grand, le quotient $\dfrac{7200}{x+60}$ est de plus en plus proche de 0 et $f(x)$ de plus en plus proche de 120.

---

19 page 123

a) $a = 3 - \sqrt{3}$, $b = 3 - \sqrt{5}$

Comme $\sqrt{3} < \sqrt{5} < 3$, (*en effet, $3 < 5 < 9$*) on a successivement :

$-3 < -\sqrt{5} < -\sqrt{3}$,

$0 < 3 - \sqrt{5} < 3 - \sqrt{3}$. (Nombres strictement positifs)

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et l'inverse d'un nombre positif étant positif, on obtient : $0 < \dfrac{1}{3-\sqrt{3}} < \dfrac{1}{3-\sqrt{5}}$

Conclusion : $0 < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$ (les inverses de a et b sont rangés dans l'ordre croissant).

b) $a = 2 - \sqrt{5}$ et $b = 2 - \sqrt{8}$

Comme $2 < \sqrt{5} < \sqrt{8}$, (*en effet, $2 < 5 < 8$*) on a successivement :

$-\sqrt{8} < -\sqrt{5} < -2$,

$2 - \sqrt{8} < 2 - \sqrt{5} < 0$. (Nombres strictement négatifs)

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et l'inverse d'un nombre négatif étant négatif, on obtient : $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}} < \dfrac{1}{2-\sqrt{8}} < 0$

Conclusion : $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$ (les inverses de *a* et *b* sont rangés dans l'ordre croissant).

---

20 page 123

$2 - \sqrt{5} < 0$ (voir exercice précédent) et $2 - \sqrt{3} > 0$ (*car, le carré de 2 est supérieur au carré de* $\sqrt{3}$).

On a donc : $a < 0 < b$.

Comme les nombres *a* et *b* sont de signes opposés, on ne peut pas utiliser la variation de la fonction inverse.

En revanche, l'inverse de *a* est négatif, l'inverse de *b* est positif, on peut donc classer les nombres :

$\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$.

---

22 page 123

a) sachant que $x \in [2 ; 2{,}5]$, c'est-à-dire : $2 \leqslant x \leqslant 2{,}5$

on a : $$\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{2{,}5}.$$

Conclusion : le meilleur encadrement de $\frac{1}{x}$ est $0{,}4 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 0{,}5$.

On a utilisé la propriété suivante :

la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

b) sachant que $x \in [-1 ; -0{,}5]$, c'est-à-dire : $-1 \leqslant x \leqslant -0{,}5$

on a : $$\frac{1}{-1} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{-0{,}5}.$$

Conclusion : le meilleur encadrement de $\frac{1}{x}$ est $-2 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant -1$

On a utilisé la propriété suivante :

la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$

---

23 page 123

a) sachant que $x \in \left]-2 ; -\frac{3}{2}\right]$, c'est-à-dire : $-2 < x \leqslant -\frac{3}{2}$

Comme la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$,

on a : $$\frac{-1}{2} > \frac{1}{x} \geqslant -\frac{2}{3}$$

Conclusion : le meilleur encadrement de $\frac{1}{x}$ est $-\frac{2}{3} \leqslant \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$

b) sachant que $x \in [3 ; +\infty[$, c'est-à-dire : $3 \leqslant x$.

Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$

on a : $\frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{x} > 0$

Conclusion : le meilleur encadrement de $\frac{1}{x}$ est $0 < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}$.

24 page 123

a) $x \leqslant -4$ mène à $-\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{x} < 0$ car la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\ ;0[$.

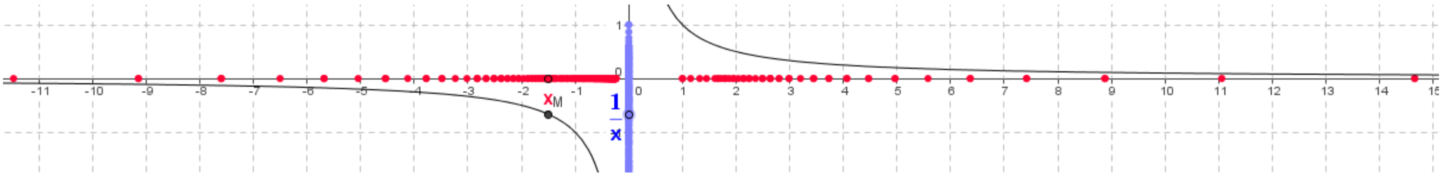
b) $x > 10$ mène à $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{10}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0\ ;+\infty[$.

27 page 124

Résoudre en utilisant la représentation graphique de la fonction inverse

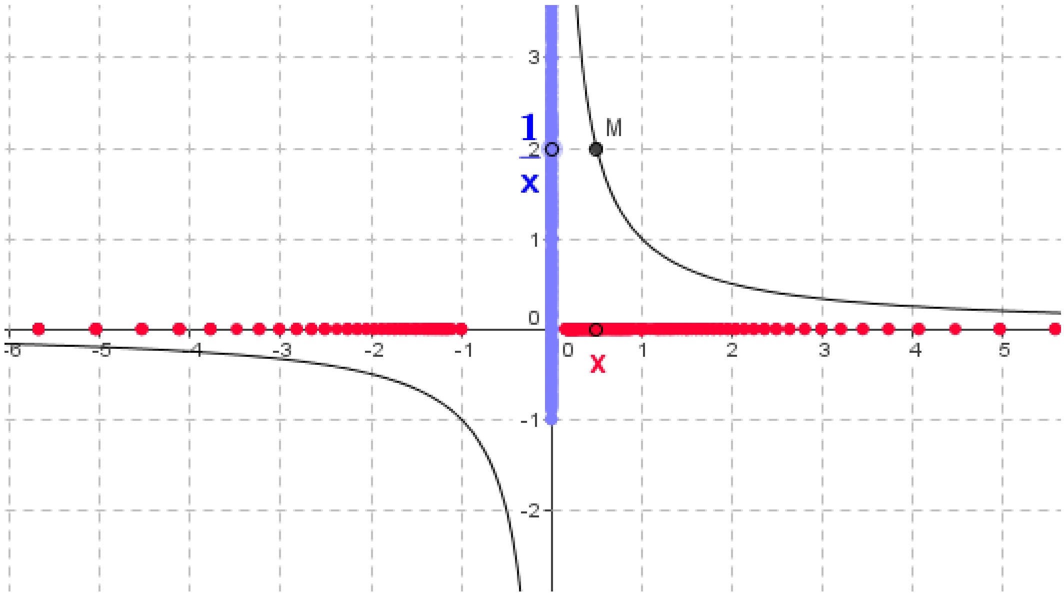
a) $\frac{1}{x} < 1$.

On lit sur le graphique : $x \in\ ]-\infty ; 0[\ \cup\ ]1 ; +\infty[$



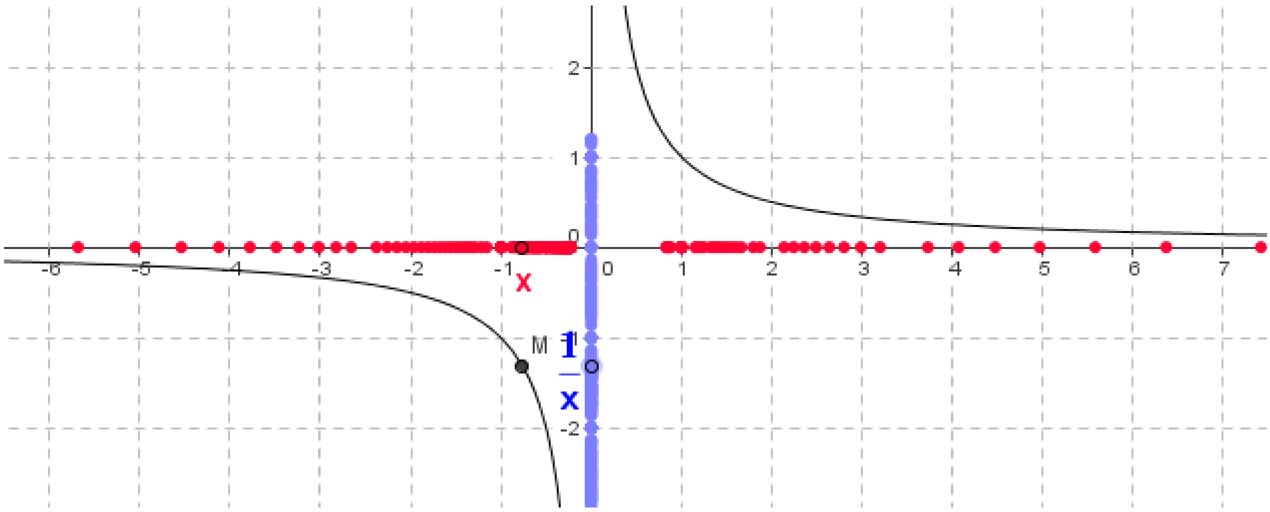
b) $\frac{1}{x} \geqslant -1$

On lit sur le graphique : $x \in\ ]-\infty ; -1]\ \cup\ ]0 ; +\infty[$



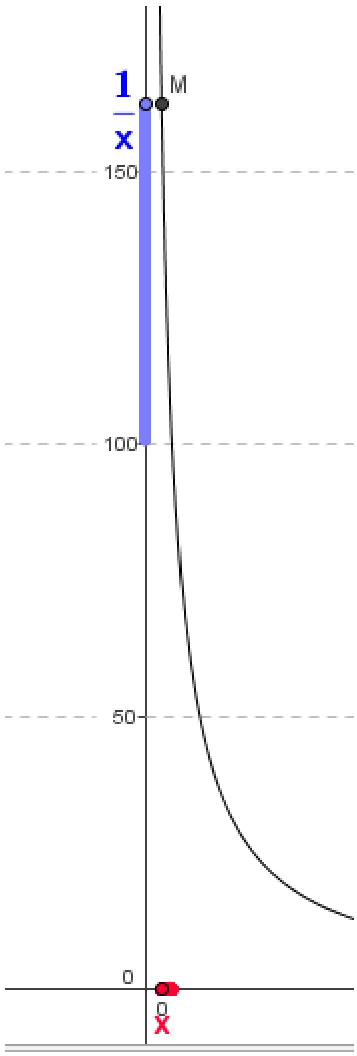
c) $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{5}{4}$.

On lit sur le graphique : $x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left[\dfrac{4}{5};+\infty\right[$



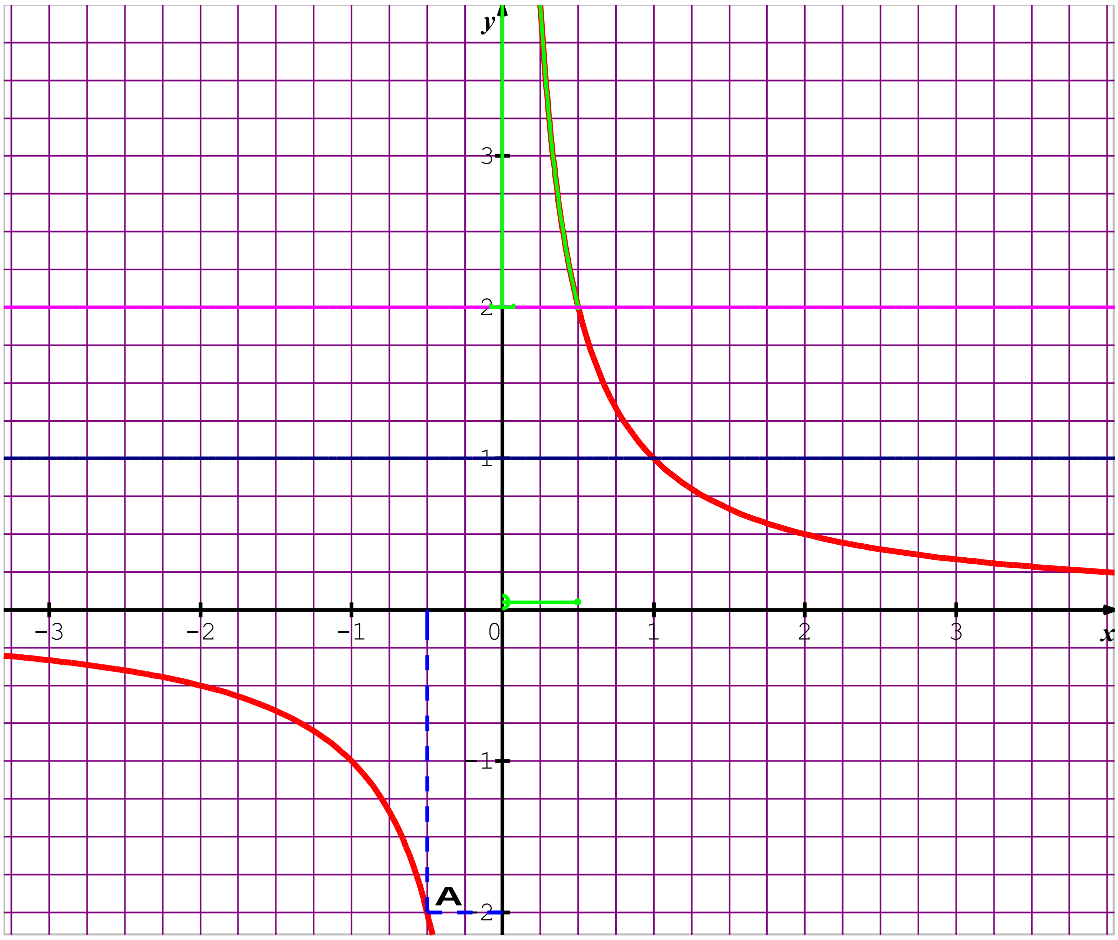
d) $\dfrac{1}{x} \geqslant 100$

On lit sur le graphique : $x \in \left]0;\dfrac{1}{100}\right]$



71 page 126

Sur le graphique, on a représenté l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ représentant la fonction inverse.



a) L'affirmation " Si $x \in [-1\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ 1]$ alors $\frac{1}{x} \geqslant 1$ " est fausse.

Contre-exemple : le point A d'abscisse $-\frac{1}{2}$ a une ordonnée -2 inférieure à 1.

b) L'affirmation " Si $x \in\ ]0\ ;\ \frac{1}{2}]$ alors $\frac{1}{x} \geqslant 1$ " est vraie.

Preuve : Tous les points d'abscisse comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$ ont leur ordonnée supérieure ou égale à 2, donc, supérieure à 1.

74 page 126

Données : $1 \leqslant x \leqslant 2$ et $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant -\frac{1}{4}$

a) Meilleur encadrement de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1$

Comme la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$, on a : $-4 \leqslant \frac{1}{y} \leqslant -2$

Par somme, il vient : $\frac{1}{2} + (-4) \leqslant \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leqslant 1 + (-2)$

Conclusion : $-\frac{7}{2} \leqslant \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leqslant -1$

b) Meilleur encadrement de $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

On doit d'abord mettre un encadrement de $-\frac{1}{y}$ dans l'ordre croissant :

$-4 \leqslant \frac{1}{y} \leqslant -2$ d'où $2 \leqslant -\frac{1}{y} \leqslant 4$

$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1$ et $2 \leqslant -\frac{1}{y} \leqslant 4$, on a : par somme : $\frac{1}{2}+2 \leqslant \frac{1}{x}-\frac{1}{y} \leqslant 1+4$, soit : $\frac{5}{2} \leqslant \frac{1}{x}-\frac{1}{y} \leqslant 5$

Conclusion : $\frac{5}{2} \leqslant \frac{1}{x}-\frac{1}{y} \leqslant 5$

c) Meilleur encadrement de $\frac{1}{x+y}$

On encadre d'abord $x + y$.

$1 \leqslant x \leqslant 2$ et $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant -\frac{1}{4}$, d'où, par somme : $1 - \frac{1}{2} \leqslant x + y \leqslant 2 - \frac{1}{4}$, soit : $\frac{1}{2} \leqslant x + y \leqslant \frac{7}{4}$

Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$, on a : $\frac{4}{7} \leqslant \frac{1}{x+y} \leqslant 2$

Conclusion : $\frac{4}{7} \leqslant \frac{1}{x+y} \leqslant 2$

d) Meilleur encadrement de $\frac{1}{x-y}$

On encadre d'abord $x - y$.

$1 \leqslant x \leqslant 2$ et $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant -\frac{1}{4}$, d'où,

$1 \leqslant x \leqslant 2$ et $\frac{1}{4} \leqslant -y \leqslant \frac{1}{2}$, d'où,

par somme : $1 + \frac{1}{4} \leqslant x - y \leqslant 2 + \frac{1}{2,}$ soit : $\frac{5}{4} \leqslant x - y \leqslant \frac{5}{2}$

Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$, on a : $\frac{2}{5} \leqslant \frac{1}{x-y} \leqslant \frac{4}{5}$

Conclusion : $\frac{2}{5} \leqslant \frac{1}{x-y} \leqslant \frac{4}{5}$

75 page 126

Programme de calcul :
Choisir un nombre
L'élever au carré
Prendre l'inverse du résultat

1) La fonction f définie par ce programme de calcul est : $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$

2)
a) Lorsque $x \in [1 ; 2]$ alors $x^2 \in [1 ; 4]$ (fonction carré croissante sur $[0 ; +\infty[$ qui contient $[1 ; 2]$)
puis $\frac{1}{x^2} \in [\frac{1}{4} ; 1]$ (fonction inverse décroissante sur $]0 ; +\infty[$ qui contient $[1 ; 4]$)

b) Lorsque $x \in [-2 ; 0[$ alors $x^2 \in]0 ; 4]$ (fonction carré décroissante sur $]-\infty ; 0]$ qui contient $[-2 ; 0[$)
puis $\frac{1}{x^2} \in]\frac{1}{4} ; +\infty[$ (fonction inverse décroissante sur $]0 ; +\infty[$ qui contient $]0 ; ; 4]$)

c) Lorsque $x \in [-2 ; 0[\cup]0 ; 1[$ alors $x^2 \in]0 ; 4]$ (fonction carré a son minimum en 0 et son maximum en –2, car, $(-2)^2 > 1^2$)
puis $\frac{1}{x^2} \in]\frac{1}{4} ; +\infty[$ (fonction inverse décroissante sur $]0 ; +\infty[$ qui contient $]0 ; ; 4]$)

83 page 126

a) $f(x) = 2 - \frac{4-3x}{2x+3}$

f est définie si et seulement si $2x + 3 \neq 0$, soit : $x \neq -\frac{3}{2}$

$D_f = \left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{-3}{2} ; +\infty\right[$

Mise au même dénominateur :

$f(x) = \frac{2(2x+3)-(4-3x)}{2x+3} = \frac{7x+2}{2x+3}$

f est une fonction homographique.

b) $g(x) = \frac{4-x}{2(x+3)} - 7$.

g est définie si et seulement si $2(x + 3) \neq 0$, soit : $x \neq -3$

$D_g =]-\infty ; -3[\cup]-3 ; +\infty[$

Mise au même dénominateur :

$\frac{4-x}{2(x+3)} - 7 = \frac{(4-x)-7\times 2(x+3)}{2(x+3)} = \frac{-15x-38}{2(x+3)}$

g est une fonction homographique.

91 page 127

a) Résoudre $\frac{2x-3}{x+5} = 0$

L'équation est définie si et seulement si $x + 5 \neq 0$, d'où, $x \neq -5$.

Le quotient est nul si et seulement si $2x - 3 = 0$, d'où, $x = \frac{3}{2}$.

L'équation $\frac{2x-3}{x+5} = 0$ a pour unique solution le nombre réel $\frac{3}{2}$.

b) Résoudre $\frac{-3x+6}{2x-1} = 0$

L'équation est définie si et seulement si $2x - 1 \neq 0$, d'où, $x \neq \frac{1}{2}$

Le quotient est nul si et seulement si $-3x + 6 = 0$, d'où, $x = 2$.

L'équation $\frac{-3x+6}{2x-1} = 0$ a pour unique solution le nombre réel 2.