Index

I- Introduction....1
I-1- Des exemples....1
I-1-1- Exemple: abonnement en bibliothèque....1
I-1-2- Exemple: périmètre du disque....2
I-1-3- Exemple: allongement d'un ressort....2
I-1-4- Bilan....2
I-1-4-1- Reconnaître chaque fonction....2
I-1-4-2- Représenter chaque fonction....2
I-2- Proportionnalité....2
I-2-1- Analyse des exemples....2
Vocabulaire et notation:....2
Conclusion:....2
I-2-2- Qu'en est-il de la réciproque?....3
Exemple: degré Celsius et degré Fahrenheit....3
II- Cours....3
II-1- Définition d'une fonction affine....3
II-1-1- Définition (par cœur)....3
II-1-2- Cas particuliers: fonction linéaire, fonction constante....3
II-1-3 Exercices:....3
1) affine ou non?....3
2) affine? oui, mais laquelle?....3
II-2- Caractérisation d'une fonction affine....4
Théorème: (par cœur)....4
Preuve:....4
II-3- variation d'une fonction affine....4
II-3-1- Étude....4
II-3-2- Théorème....4
II-4 Représentation graphique d'une fonction affine (par cœur)....4
Exercices:....5
1) Tracer....5
2) Reconnaître....5
II-5- Étude du signe de l'expression ax + b. Tableau de signes....6
II-5-1- Théorème:....6
II-5-2- Des démonstrations....6
II-5-3- Exercices....6
1) Signe d'un produit, d'un quotient....6
2) Pourquoi factoriser?....6
3) Pourquoi ramener à 0?....6
4) Chercher l'erreur....6

I- Introduction

Objectif: Découvrir qu'un même modèle mathématique permet d'étudier des phénomènes différents.

I-1- Des exemples

I-1-1- Exemple: abonnement en bibliothèque

Dans une bibliothèque, l'abonnement annuel est de 10 €. Pour chaque livre emprunté, on paie 0,5 €.
On note h la fonction exprimant la dépense annuelle pour un abonné de cette bibliothèque.
Un lecteur a emprunté x livres cette année. Quelle est sa dépense $h(x)$?
....

I-1-2- Exemple: périmètre du disque

On note R le rayon d'un disque et p la fonction exprimant le périmètre du disque.
Quel est le périmètre $p(R)$ d'un disque de rayon R?
....

I-1-3- Exemple: allongement d'un ressort

On dispose d'un ressort de longueur 10 cm. Pour une masse m comprise entre 0 et 100g accrochée au ressort, l'allongement du ressort est **proportionnel** à cette masse.
On note l la fonction exprimant la longueur du ressort.
On a accroché une masse m. Quelle est la longueur $l(m)$ du ressort?
....

I-1-4- Bilan

On a ainsi obtenu trois fonctions.

Ces trois fonctions peuvent s'écrire sous la forme: $f : x \mapsto$ …

I-1-4-1- Reconnaître chaque fonction

Dans un tableau, pour chaque exemple, préciser ce qu'est " f ", ce que sont " x " et " $f(x)$ ".
Sur quel ensemble f est-elle définie ?

Exemples	Nom de la fonction	définie sur ...	Nom de la variable	Image par ...
exemple 1				
exemple 2				
exemple 3				

I-1-4-2- Représenter chaque fonction

Pour chacune de ces fonctions, prendre 4 valeurs distinctes de la variable, calculer leurs images et placer les points représentant ces valeurs dans un repère. (Un graphique par fonction).

Rappeler le nom des fonctions qui peuvent s'écrire ainsi.

I-2- Proportionnalité

I-2-1- Analyse des exemples

Vocabulaire et notation:

Lorsqu'un nombre prend des valeurs variables V passe d'une valeur V_1 à une valeur V_2, la différence $V_2 - V_1$ est l'***accroissement*** de la variable V.
On note $\Delta V = V_2 - V_1$

Conclusion:

Montrer que dans ces trois exemples, ***l'accroissement des valeurs images prises par la fonction est proportionnelle à l'accroissement de la variable***:
....
....
....

I-2-2- Qu'en est-il de la réciproque?

Exemple: degré Celsius et degré Fahrenheit

Il existe différentes échelles pour mesurer la température, en particulier une échelle graduée en degrés Celsius (°C) et une échelle graduée en degrés Fahrenheit (°F). (*Les graduations sont régulières dans chacune des échelles*).
On sait que l'eau gèle à 0°C ou 32°F et qu'elle bout à 100°C ou 212°F.
Établir la formule qui permet de convertir les °C en °F.
....
....
....

II- Cours

II-1- Définition d'une fonction affine

II-1-1- *Définition (par cœur)*

Soit a et b deux réels.

Les **fonctions affines** sont les fonctions de la forme : $x \mapsto ax + b$

Remarque : Dans cette écriture, il faut distinguer les réels a et b (qui sont des constantes) des valeurs variables.
a et b sont appelés les coefficients de la fonction affine. (*On précisera plus tard leur rôle*).
Dans les exemples du §I- reconnaître les coefficients.

Exemples	***Fonction***	**coefficient *a***	**coefficient *b***
exemple 1			
exemple 2			
exemple 3			

II-1-2- Cas particuliers: fonction linéaire, fonction constante

Lorsque le réel b est nul $b = 0$, on dit que f est une ***fonction linéaire***. Elle traduit une situation de proportionnalité (cf. exemple 2). $f\colon\ x \mapsto ax$

Lorsque le coefficient a est nul ($a = 0$), on a une fonction ***constante***. $f\colon\ x \mapsto b$

II-1-3 Exercices:

1) affine ou non?

Parmi les fonctions f, g, h, k, l, m , n, p suivantes, indiquer les fonctions affines: (Justifier vos réponses)

$f(x) = \sqrt{x} + 1$, $g(x) = \sqrt{2}\, x - 1$, $h(t) = -\dfrac{1}{2}t + 3$, $k(t) = -\dfrac{1}{2t} + 3$, $l(x) = \dfrac{-5x+6}{3}$, $m(x) = \dfrac{6+x}{x}$,

$n(x) = t^2x + 1$ et $p(t) = t^2x + 1$

2) affine? oui, mais laquelle?

Déterminer la fonction **affine** f telle que $f(-1) = 3$ et $f(3) = 5$.

II-2- Caractérisation d'une fonction affine

Théorème: (par cœur)

Une fonction f est une fonction affine **si et seulement si** l'accroissement Δy de l'image est proportionnel à l'accroissement Δx de la variable.
Autrement dit:
Une fonction f est une fonction affine **si et seulement si** , pour tous réels x_1 et x_2 distincts, on a:
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = a$ où a est une constante réelle.

Preuve:

Sens direct: On sait que f une fonction affine, donc, ...
....
....
***Sens réciproque**:* On sait qu'une fonction f vérifie la propriété: pour tous réels x_1 et x_2 distincts, on a:
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = a$ où a est une constante réelle.
En prenant, $x_1 = 0$ et $x_2 = x$, et en posant $f(0) = b$, on a: ....
....

II-3- variation d'une fonction affine

II-3-1- Étude

On suppose $x_1 < x_2$.
Quel est le signe de $x_2 - x_1$? ....
D'après un des paragraphes précédents, on a: $f(x_2) - f(x_1) =$ ……..
En déduire l'ordre de $f(x_1)$ et $f(x_2)$ en distinguant deux cas:
$a > 0$...

$a < 0$...

II-3-2- Théorème

Théorème: (par cœur)
Si a est strictement positif alors la fonction affine: f: $x \mapsto ax+b$ est .... sur ....
Si a est strictement négatif alors la fonction affine: f: $x \mapsto ax+b$ est .... sur ....

II-4 Représentation graphique d'une fonction affine (par cœur)

(À admettre: la démonstration sera faite dans un autre chapitre)
La représentation d'une fonction affine f: $x \mapsto ax+b$ dans un repère $(O; I, J)$ est une droite (D) non parallèle à l'axe des ordonnées d'***équation réduite*** $y = ax + b$.

Le réel a est le **coefficient directeur** de la droite. $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_a} = \frac{\text{« différence des ordonnées »}}{\text{« différence des abscisses »}}$
Le réel b est **l'ordonnée à l'origine** de la droite.

Exercices:

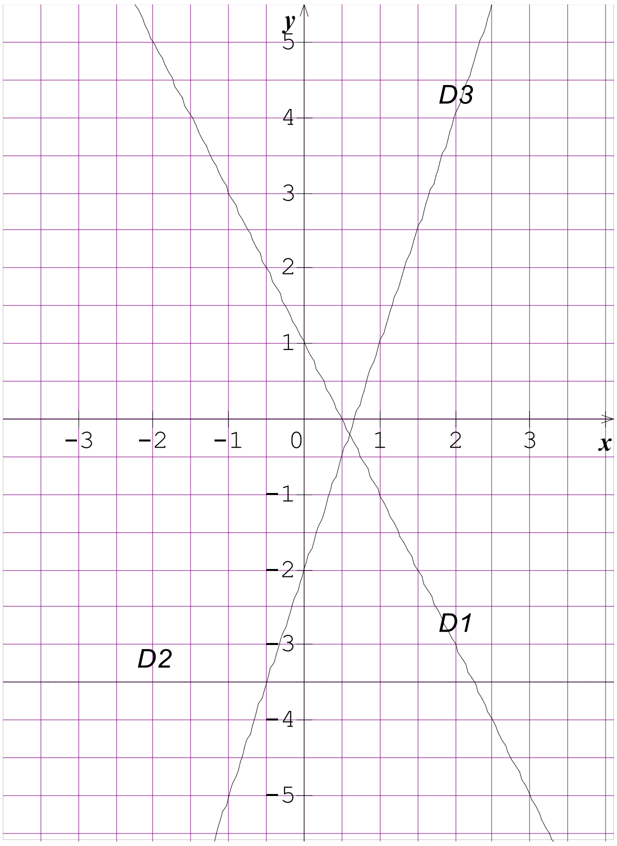
1) Tracer

Tracer dans un repère la représentation graphique des fonctions f, g, h définies par:

$f : x \mapsto 2x + 1$, $g : x \mapsto -x + 3$, $h: x \mapsto \dfrac{x+5}{2}$

2) Reconnaître

Sur le graphique ci-dessous, déterminer les fonctions affines f_1, f_2, f_3 représentées respectivement par D_1, D_2, D_3



II-5- Étude du signe de l'expression ax + b. Tableau de signes

II-5-1- Théorème:

a étant un réel non nul, l'expression $ax + b$ s'annule en $-\dfrac{b}{a}$ en changeant de signe.

Cas où a > 0					
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de ax+b		$-$	0	$+$	

Cas où a < 0					
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de ax+b		$+$	0	$-$	

II-5-2- Des démonstrations

Démontrer ce théorème
* en utilisant la représentation graphique d'une fonction affine.

** en utilisant la variation d'une fonction affine
*** en utilisant la résolution d'inéquations.

II-5-3- Exercices

1) Signe d'un produit, d'un quotient

Faire les tableaux de signes de $x-1$ et de $3-2x$.

En déduire le tableau de signes du produit $P(x) = (x-1)(3-2x)$, puis du quotient $Q(x) = \frac{3-2x}{x-1}$.

Sans calculs, donner les signes de $x-1$, $3-2x$, $P(x)$ et $Q(x)$ lorsque
$x = 2\sqrt{2}$, $x = \sqrt{3}$, $x = -2{,}75$, $x = 10^{-2}$, $x = 10^9$, $x = -10^5$

2) Pourquoi factoriser?

Soit $f(x) = x^2 - 3x - 10$ ***Sous cette forme développé, pouvez-vous donner le signe de f (x)*** ?
Montrer que pour tout réel x, $f(x) = (x+2)(x-5)$, puis, résoudre $f(x) \geqslant 0$.
Comprendre : ***Pourquoi on peut donner le signe de f (x) lorsque f (x) est sous forme factorisée ?***

3) Pourquoi ramener à 0?

Pour $x \neq -3$, on pose $g(x) = \frac{2x+1}{x+3}$. Résoudre $g(x) \leqslant 3$

4) Chercher l'erreur

Dans un exercice, on doit résoudre pour $x \neq 0$ l'inéquation $\frac{x-1}{x} > 2$

On propose cette résolution:
$\frac{x-1}{x} > 2$ revient à $x-1 > 2x$. On obtient alors $-1 > x$
Les solutions sont les réels inférieurs à -1.
En prenant un réel inférieur à -1, montrer que cette solution est fausse.
Expliquer pourquoi la résolution est fausse.
Comprendre : ***Pourquoi doit-on comparer à 0 pour donner le signe d'une expression ?***