Index

Prévoir une feuille à carreaux

I- Définition

I-1 Rappel

Écrire les carrés des nombres suivants:

nombre	0	1	–1	0,5	0,25	–0,25	0,7	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{7}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}+1$
son carré											

Existe-t-il des réels qui n'ont pas de carré?..................................Si oui, le(s)quel(s)?....................................
Soit x un réel, son carré est le réel ....
Que peut-on dire du signe du carré d'un réel?...
Un réel A ***positif*** étant donné, combien existe-t-il de réels a tels que $a^2 = A$? ....
Comment se notent ces réels en fonction de A?

I-2 Définition:

La **fonction carré** est la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ (ou $\mathbb{R}$) qui, à un réel, associie son carré.
On note $x \longmapsto x^2$ ou $t \longmapsto t^2$ ou ....

II- Une propriété de la fonction carré:

II-1 Observation

On note f la fonction carré
Trouver une relation entre $f(-x)$ et $f(x)$

Remarque et définition:

On dit qu'une fonction f est une fonction paire lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:
Si $x \in E_f$ alors $-x \in E_f$ et $f(-x) = f(x)$
Conséquence: la fonction carré est une fonction paire

II-2 Interprétation graphique de cette propriété

(Prendre la feuille à carreaux)

Soit f la fonction carré.
Dans un repère orthogonal, placer un point M quelconque. On suppose que M est un point de C_f d'abscisse x.
Quelle est l'ordonnée de M?..
Construire le point $M'(-x; f(-x))$.
Que peut-on dire de M et M'? ....
Résultat:
La représentation graphique C_f de la fonction carré dans un repère orthogonal est ….....................................
....

Remarque

Lorsqu'une fonction est paire alors sa représentation graphique dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et la réciproque est vraie.

III- Sens de variation de la fonction carré.

III-1 Rappel:

Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles où la fonction reste monotone (ne change pas de variations).

On étudie toujours les variations d'une fonction sur un intervalle.

III-2 Méthode

On choisit deux réels a et b sur .... tels que a …....... b
et on cherche …..........… ...... de f(a) et $f(b)$
ou encore
on cherche le ….............................. de $f(b) - f(a)$.

III-3 Calculs:

On note f la fonction carré

$f(b) - f(a) =$ ....

....

Soient $0 < a < b$

Comme a....................... et b......................................, la somme $a + b$ est ....

Comme $a < b$, la différence $a - b$ est ....;

Finalement: le produit .... est ....

Synthèse:

On a montré: Si $0 < a < b$ alors $f(a)$ .... $f(b)$

Conclusion: la fonction carré est .... sur ....

Qu'est-ce qui change quand on étudie la variation de la fonction carré sur $]-\infty; 0]$?

III-4 Résumé dans un tableau de variations

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
x^2	

IV- Représentation graphique de la fonction carré

IV-1 Tableau de valeurs:

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2			
x^2								

IV-2 Graphique

IV-2-1- Représentation graphique

Prendre la feuille à carreaux et faire la représentation graphique de la fonction carré dans un repère

IV-2-2- Définition

La représentation graphique dans un repère $(O; I, J)$ de la fonction carré est une **parabole** de sommet $O(0; 0)$ et d'équation $y = x^2$.

L'axe des ordonnées est un .... de cette parabole.

V- Quelques calculs

V-1- Carré de somme et somme de carrés; produit ...

a et b sont des réels quelconques.

f est la fonction carré.

Comparer $f(a + b)$ et $f(a) + f(b)$.

Comparer $f(3a)$ et $3f(a)$

V-2- Expression du second degré

V-2-1- Quelques calculs

Développer:

$(x-1)^2 =$

$2(x-1)^2 - 4 =$

$-3(x-1)^2 - 4 =$

V-2-2- Définition: fonction polynôme du second degré

On appelle fonction polynôme du second degré une fonction qui peut s'écrire (sous forme développée)

$x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a est un réel non nul, b et c sont des réels.

Exemples:
Les fonctions
$x \mapsto 2x^2 + x - 1$, $x \mapsto -x^2 - 4$, $t \mapsto -3t^2 + 2t + 1$ $n \mapsto 5n^2 - 8$
sont des fonctions polynômes du second degré.
$x \mapsto x^3 + 2x^2 - 3x + 1$; $t \mapsto -\dfrac{1}{t} + t^2$; $z \mapsto -z + 1$ **ne sont pas** des fonctions polynômes du second degré.

V-3- Forme canonique:

On peut démontrer les résultats suivants: (Résultats à connaître)
1) Les fonctions polynômes du second degré peuvent s'écrire sous la forme: $x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ où a est un réel non nul, α et β sont des réels.
2) La représentation graphique de la fonction p: $x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ est une parabole de sommet $\Omega(\alpha; \beta)$ et ayant pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$ (droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par Ω)
3) On peut résumer les variations dans un tableau de variations:

2 cas:

Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
p			

Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
p			

VI- Utilisation de la fonction carré

VI -1 Pour étudier certaines inéquations où intervient le carré d'un nombre.

Exemples: Résoudre dans $\mathbb{R}$ (l'utilisation d'un graphique est fortement conseillée)
Partie I- a) $t^2 \leqslant 4$ b) $4 \leqslant t^2 \leqslant 9$ c) $t^2 \geqslant 4$ d) $2 \leqslant t^2 \leqslant 7$
Partie II: En utilisant la partie I-
Résoudre dans $\mathbb{R}$
a) $(x-4)^2 \leqslant 4$ b) $4 \leqslant (2x+1)^2 \leqslant 9$ c) $(3-x)^2 \geqslant 4$ d) $2 \leqslant (3x+1)^2 \leqslant 7$

VI-2 Pour encadrer le carré d'un nombre

VI-2-1 Encadrement d'un nombre au carré

Encadrer le nombre x^2 (en justifiant)

a) $\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 2$

b) $-5 \leqslant x < -\frac{3}{4}$

c) $-2 \leqslant x \leqslant 4$

VI-2-2 Encadrement d'une expression au carré

Encadrer $(x+5)^2$

a) lorsque $x \in [6;9]$,

b) lorsque $x \in [-10;-8]$,

c) lorsque $x \in [-7;-3;]$