

Index

I- Définition.....	1
I-1 Rappel.....	1
I-2 Définition:.....	1
II- Propriété: fonction impaire.....	2
II-1 Observation.....	2
Remarque et définition:.....	2
II-2 Interprétation graphique d'une fonction impaire.....	2
III- Sens de variation de la fonction inverse.....	2
III-1 Rappel:	2
III-2 Méthode.....	2
III-3 Calculs:	2
III-4 Résumé dans un tableau.....	3
III-5 À remarquer:.....	3
IV- Représentation graphique de la fonction inverse.....	3
IV-1 Tableau de valeurs:	3
IV-2 Graphique.....	3
IV-2-1- Représentation graphique.....	3
IV-2-2- Définition.....	3
V- Quelques calculs- Fonctions homographiques.....	3
V-1- Somme, produit, inverse	3
V-2- Ensemble de définition.....	3
V-3- Fonctions homographiques.....	4
Définition :.....	4
remarques :.....	4
VI- Utilisation de la fonction inverse.....	4
VI-1 Pour étudier certaines fonctions où intervient la fonction inverse.....	4
VI-2 Pour étudier certaines inéquations où intervient l'inverse d'un nombre.....	4
VI-3 Pour encadrer l'inverse d'un nombre.....	4
VI-3-1 Encadrement de l'inverse d'un nombre.....	4
VI-3-2 Encadrement de l'inverse d'une expression.....	4

I- Définition

I-1 Rappel

Écrire les inverses des nombres suivants:

nombre	1	-1	0,5	0,25	-0,25	0,7	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{7}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}+1$
son inverse										

Existe-t-il des réels qui n'ont pas d'inverse? Si oui, le(s)quel(s)?.....

Soit x un réel, son inverse est le réel

Le produit d'un réel par son inverse est égal à

Que peut-on dire des signes d'un réel et de son inverse?

I-2 Définition:

La fonction inverse est la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ (noté aussi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou \mathbb{R}^*), qui, à un réel non nul, associe son inverse.

On note $x \mapsto \frac{1}{x}$ ou $t \mapsto \frac{1}{t}$ ou ...

II- Propriété: fonction impaire

II-1 Observation

On note f la fonction inverse
 Trouver une relation entre $f(-x)$ et $f(x)$

Remarque et définition:

On dit qu'une fonction f est une fonction impaire lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:

Si $x \in E_f$ alors $-x \in E_f$ et $f(-x) = -f(x)$

Conséquence: la fonction inverse est une fonction impaire

II-2 Interprétation graphique d'une fonction impaire

(Sur un quadrillage)

Soit f une fonction impaire.

Dans un repère orthogonal, placer un point M quelconque. On suppose que M est un point de C_f d'abscisse x .

Quelle est l'ordonnée de M ?

Construire le point $M'(-x; f(-x))$.

Que peut-on dire de M et M' ?

Résultat:

Lorsqu'une fonction f est impaire, sa représentation graphique C_f dans un repère est

(La réciproque est vraie)

III- Sens de variation de la fonction inverse.

III-1 Rappel:

Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles où la fonction reste monotone (ne change pas de variations).

On étudie toujours les variations d'une fonction sur un intervalle.

Conséquence: on doit étudier la variation de la fonction inverse d'une part sur et d'autre part sur

III-2 Méthode

On choisit deux réels a et b sur tels que $a < b$

et on cherche de $f(a)$ et $f(b)$

ou encore

on cherche le de $f(b) - f(a)$.

III-3 Calculs:

On note f la fonction inverse

Soit $0 < a < b$, $f(b) - f(a) =$

Comme $a < b$ et $b > 0$, le produit ab est

Comme $a < b$, la différence $a - b$ est

Finalemment: le quotient est

Synthèse:

On a montré: Si $0 < a < b$ alors $f(a) > f(b)$

Conclusion: la fonction inverse est sur

Qu'est-ce qui change quand on étudie la variation de la fonction inverse sur $]-\infty;0[$?

III-4 Résumé dans un tableau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			

La **double-barre** signifie que la fonction n'est pas définie en 0. Cette double-barre est infranchissable

III-5 À remarquer:

Montrer sur un exemple que la phrase : "la fonction inverse est strictement décroissante" n'a pas de sens.

Compléter la phrase pour qu'elle ait un sens:

la fonction inverse est strictement décroissante

IV- Représentation graphique de la fonction inverse.

IV-1 Tableau de valeurs:

x	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	1	2	4	5
$\frac{1}{x}$								

IV-2 Graphique

IV-2-1- Représentation graphique

Faire la représentation graphique dans un repère.

IV-2-2- Définition

La représentation graphique dans un repère $(O; I, J)$ de la fonction inverse est

une **hyperbole** de centre $O(0 ; 0)$ d'équation $y = \frac{1}{x}$

Les axes de coordonnées sont les asymptotes de cette hyperbole.

V- Quelques calculs- Fonctions homographiques

V-1- Somme, produit, inverse ...

f est la fonction inverse.

a et b sont des réels non nuls.

A-t-on l'égalité $f(a + b) = f(a) + f(b)$?

A-t-on l'égalité $f(3a) = 3 \times f(a)$?

V-2- Ensemble de définition

Quels sont les réels qui ont une image par g définie par: $g : x \mapsto \frac{2x+1}{x-2}$?

On note D_g cet ensemble.

Montrer que pour tout $x \in \text{Dg}$, $g(x) = 2 + \frac{5}{x-2}$

V-3- Fonctions homographiques

Définition :

Une fonction homographique est une fonction f telle que $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec a, b, c et d réels et c non nul.

remarques :

f est le quotient de deux fonctions affines

f est définie pour les valeurs qui n'annulent pas le dénominateur, c'est-à-dire pour $x \neq \dots\dots\dots$

On aura pour le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\dots\dots$	$+\infty$
f			

On peut écrire $f(x) = \frac{a}{c} + \frac{k}{cx+d}$ (forme canonique qui permet de faire l'étude de f)

f est représentée par une hyperbole

VI- Utilisation de la fonction inverse

VI-1 Pour étudier certaines fonctions où intervient la fonction inverse.

Exemple Étudier la variation de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ sur $]-\infty; 2[$, puis sur $]2; +\infty[$.

VI-2 Pour étudier certaines inéquations où intervient l'inverse d'un nombre

Exemple: Résoudre dans \mathbb{R}

- a) $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{x} > -\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{x} \leq 4$ d) $\frac{1}{x-1} \leq 4$

VI-3 Pour encadrer l'inverse d'un nombre

VI-3-1 Encadrement de l'inverse d'un nombre

Encadrer lorsque c'est possible le nombre $\frac{1}{x}$ (en justifiant)

- a) $\frac{1}{5} \leq x \leq 2$ b) $-5 \leq x < -\frac{3}{4}$ c) $-2 \leq x \leq 4$

VI-3-2 Encadrement de l'inverse d'une expression

Encadrer $\frac{1}{x+5}$ lorsque

- a) $x \in [-3; 2]$
b) $x \in [-10; -6]$