Index

I- Activités

I-1- Une expérience aléatoire

Description de l'expérience

Un sac n° 1 contient 5 boules numérotées de 3 à 7.

Un sac n° 2 contient quatre jetons numérotés de 2 à 5.

On tire au hasard une boule du sac n° 1 et un jeton du sac n°2, on fait la somme de leurs numéros et on les remet dans leurs sacs respectifs.

Analyse de l'expérience: tableau à double entrée

Construire un tableau à double entrée permettant de lire la somme obtenue.

Loi de probabilité

Écrire dans un tableau de 2 lignes toutes les issues ou résultats possibles et leur probabilité.

Somme	
Probabilité	

(Avec ce dernier tableau, on a donné la loi de probabilité de l'expérience aléatoire;

Si on imagine répéter indéfiniment l'épreuve, la fréquence de chaque somme (distribution des fréquences) se stabilise autour d'une valeur qui est la probabilité.
On peut simuler l'expérience avec la calculatrice ou un tableur ou un logiciel comme Algobox ...)

I-2- Une autre expérience aléatoire

Description de l'expérience

Un sac contient 10 jetons: 5 jetons rouges, 3 jetons verts et 2 jetons bleus.

On tire au hasard successivement et sans remise 3 jetons dans le sac et on note leurs couleurs dans l'ordre des tirages.

Analyse de l'expérience: arbre de probabilité

Construire un arbre permettant de lire toutes les issues. (Prendre une page entière)

Loi de probabilité

Donner la loi de probabilité de cette expérience aléatoire:

II- Vocabulaire, notations, définitions et propriétés à connaître.

II-1- Expérience aléatoire, univers

Une expérience aléatoire est une expérience dont on connaît les résultats possibles ou issues sans que l'on puisse dire quel sera le résultat qui sera obtenu.

L'ensemble E de tous les résultats est l'univers des possibles.

Exemples:

1) On lance un dé cubique à six faces numérotées de 1 à 6.

L'univers E = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

2) Dans l'activité I-1, l'univers E = {...}

3) Dans l'activité I-2, l'univers E = {...}

II-2- Événement, événement contraire

Événement

Un événement A est un sous-ensemble ou une partie de l'univers.

Exemples:

1) On lance un dé cubique à six faces numérotées de 1 à 6.

L'univers E = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

A : " le numéro obtenu est pair " A= {2; 4; 6}

B: " le numéro est strictement inférieur à 3} B = { }

2) Dans l'activité I-1, écrire les éléments de l'événement C : " le résultat est un multiple de 4 "

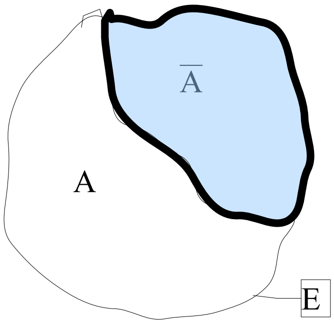
C = { }

3) Dans l'activité I-2, écrire les éléments de l'événement D : " on n'a pas tiré de jeton vert "

D = {..}

Événement contraire

L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est la partie de l'univers constituée de tous les éléments qui ne sont pas des éléments de A.



Exemples:

Écrire les éléments de $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$.

Remarque: les partie A et $\overline{A}$ sont complémentaires
$\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E.

II-3- Événement élémentaire

Un événement élémentaire est une partie de E qui ne contient qu'un seul élément.

Exemples:

1) On lance un dé cubique à six faces numérotées de 1 à 6.

L'univers E = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

F: " obtenir le 6 "

2) Dans l'activité I-1, G : " le résultat est un multiple de 10 "

3) Dans l'activité I-2, H : " on a tiré trois jetons verts "

II-4- Probabilité, hypothèse d'équiprobabilité.

Rappel des résultats en statistiques:

En statistiques, on a vu que si on répétait la même expérience de nombreuses fois, les fréquences se stabilisaient.

On sait qu'une fréquence est un nombre compris entre 0 et 1, et, que la somme de toutes les fréquences est égale à 1.

Définition d'une probabilité

Pour définir une probabilité, on attribue à chaque événement élémentaire un nombre entre 0 et 1 de telle sorte que la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

Exemples:

1) Activités I-1 et I-2

2) On joue à pile ou face avec une pièce mal équilibrée. On remarque que la probabilité de faire " pile " est le double de celle de faire " face ".

Établir la loi de probabilité.
3) On lance un dé truqué de la façon suivante: la probabilité d'un numéro est proportionnel à ce numéro.
Établir la loi de probabilité.

Hypothèse d'équiprobabilité

Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'ils sont équiprobables.

Si l'univers contient n issues, la probabilité d'un événement élémentaire est $\frac{1}{n}$

Exemples:

1) Une pièce bien équilibrée p(pile) = p(face) = ...

2) Un dé bien équilibré p(1) = p(2) = ... = p(6) = ...

3) On tire au hasard un nom dans la liste des élèves de 2°2. p(" élève ") = ...

Probabilité d'un événement

Soit A un événement.

On calcule la probabilité de A en faisant la somme des probabilités des événements élémentaires qui composent A.

Exemples:

Calculer les probabilités des événements A, B, C, D, F, G, H des § précédents.

Probabilité de l'événement contraire

D'après les définitions des § précédents, on a:

$p(A) + p(\overline{A})$ = ...

Exemples:

Calculer les probabilités des événements $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$, $\overline{H}$ des § précédents.

II-5- " A et B ", " A ou B "

A et B

L'événement A **et** B, noté $A \cap B$, est l'événement dont les issues sont communes à A et à B. (Elles sont à la fois dans A et dans B).

Conseil:

Revoir si besoin, l'intersection d'intervalles et le sens du " ET " en logique.

Exemples:

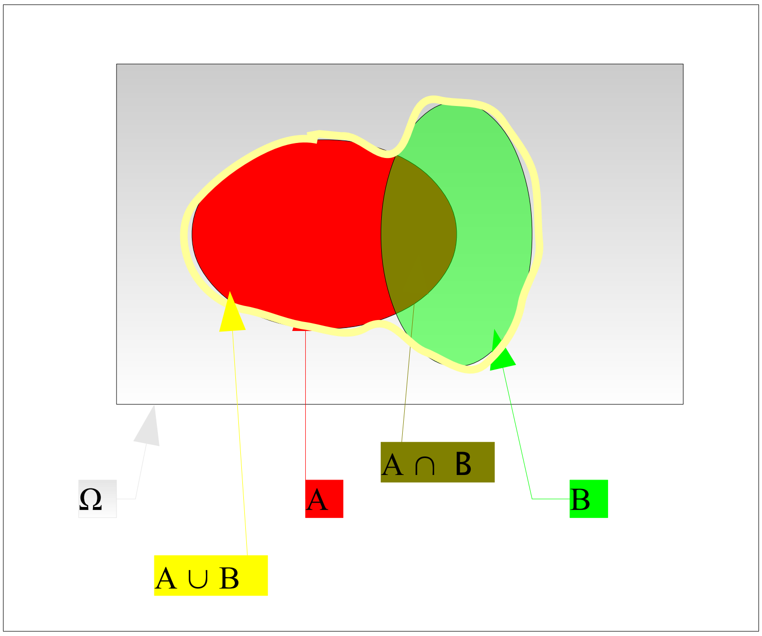
A ou B

L'événement A **ou** B, noté $A \cup B$, est l'événement dont les issues sont dans A ou dans B. (Elles peuvent être communes à A et à B).

Conseil:

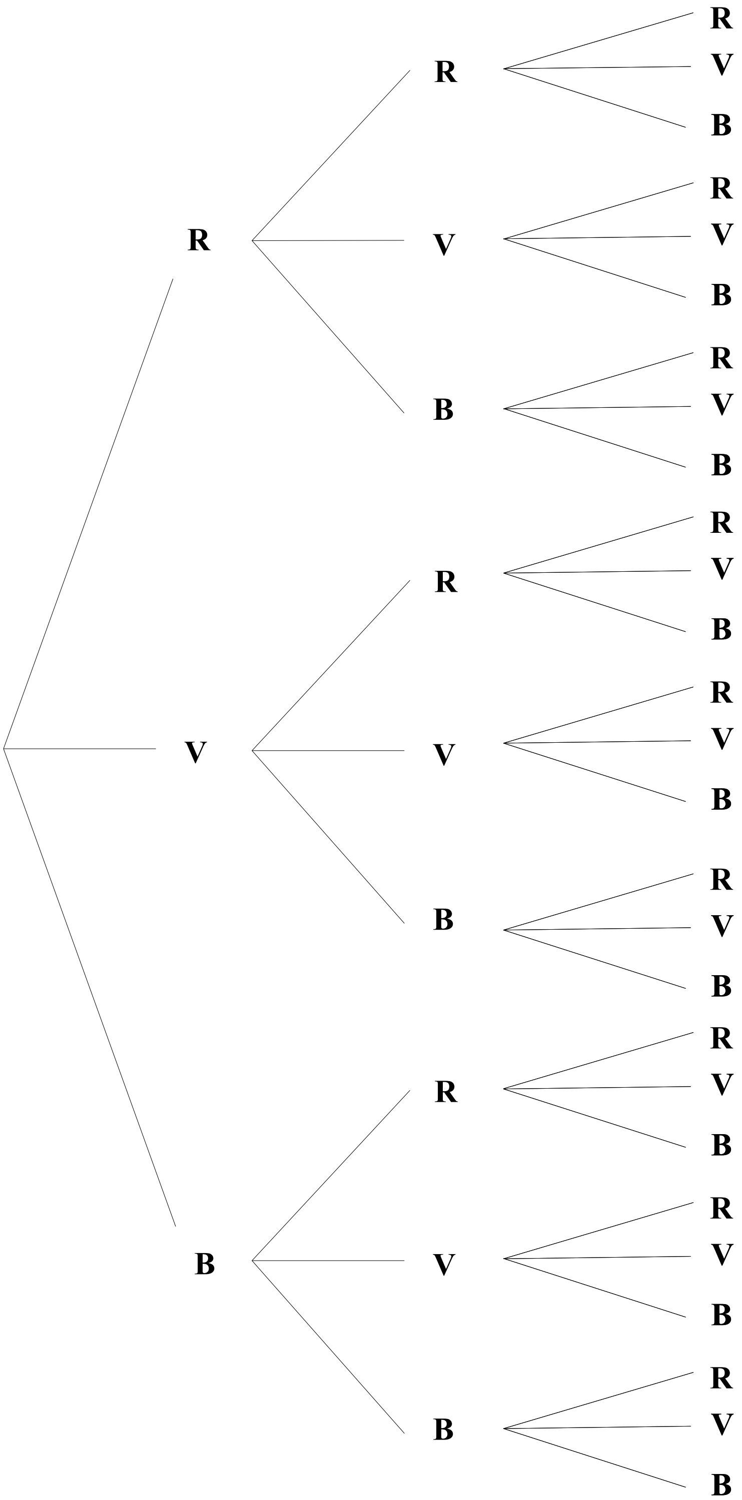
Revoir si besoin, la réunion d'intervalles et le sens du " OU " en logique.

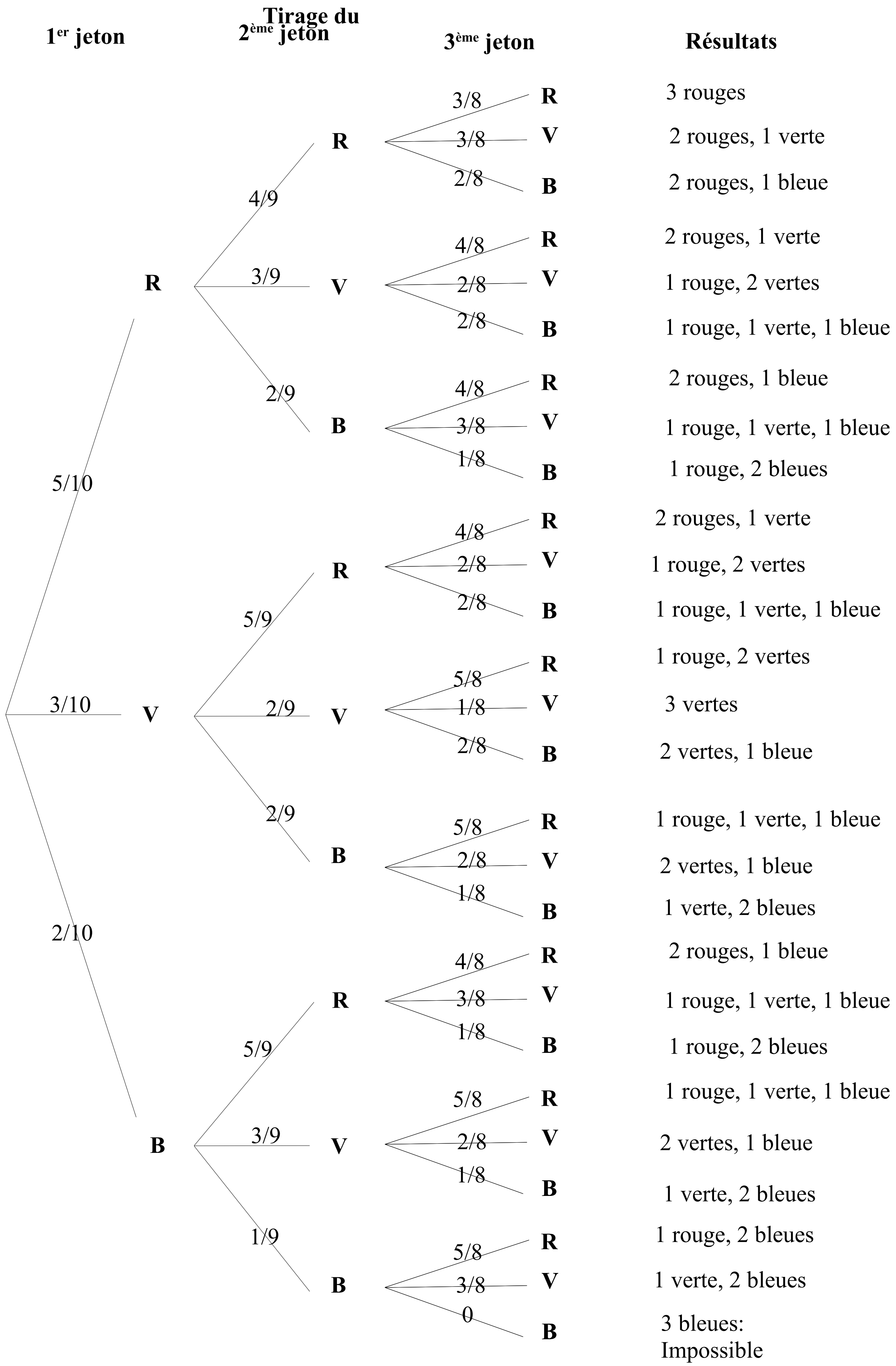
Exemples:



On a alors la relation suivante: $P(A \cup B)$ = ...

1er jeton **Tirage du 2ème jeton** **3ème jeton** **Résultats**




1er jeton
Tirage du 2ème jeton
3ème jeton
Résultats
5/10
R
4/9
R
3/8 R 3 rouges
3/8 V 2 rouges, 1 verte
2/8 B 2 rouges, 1 bleue
3/9
V
4/8 R 2 rouges, 1 verte
2/8 V 1 rouge, 2 vertes
2/8 B 1 rouge, 1 verte, 1 bleue
2/9
B
4/8 R 2 rouges, 1 bleue
3/8 V 1 rouge, 1 verte, 1 bleue
1/8 B 1 rouge, 2 bleues
3/10
V
5/9
R
4/8 R 2 rouges, 1 verte
2/8 V 1 rouge, 2 vertes
2/8 B 1 rouge, 1 verte, 1 bleue
2/9
V
5/8 R 1 rouge, 2 vertes
1/8 V 3 vertes
2/8 B 2 vertes, 1 bleue
2/9
B
5/8 R 1 rouge, 1 verte, 1 bleue
2/8 V 2 vertes, 1 bleue
1/8 B 1 verte, 2 bleues
2/10
B
5/9
R
4/8 R 2 rouges, 1 bleue
3/8 V 1 rouge, 1 verte, 1 bleue
1/8 B 1 rouge, 2 bleues
3/9
V
5/8 R 1 rouge, 1 verte, 1 bleue
2/8 V 2 vertes, 1 bleue
1/8 B 1 verte, 2 bleues
1/9
B
5/8 R 1 rouge, 2 bleues
3/8 V 1 verte, 2 bleues
0 B 3 bleues: Impossible

Loi de probabilité:

$P(3R) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{5\times4\times3}{10\times9\times8} = \frac{1}{12}$

$P(2R1V) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = 3\times \frac{5\times4\times3}{10\times9\times8} = \frac{1}{4}$

$P(2R1B) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{5}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{2}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = 3\times \frac{5\times4\times2}{10\times9\times8} = \frac{1}{6}$

$P(1R2V) = \frac{5}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{5}{8} = 3\times \frac{5\times3\times2}{10\times9\times8} = \frac{1}{8}$

$P(1R2B) = \frac{5}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} + \frac{2}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{1}{8} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{5}{8} = 3\times \frac{5\times2\times1}{10\times9\times8} = \frac{1}{24}$

$P(1R1V1B) = \frac{5}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{5}{8} + \frac{2}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{5}{8} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{5}{8} =$

$= 6\times \frac{5\times3\times2}{10\times9\times8} = \frac{1}{4}$

$P(3V) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$.

$P(2V1B) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{2}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = 3\times \frac{3\times2\times2}{10\times9\times8} = \frac{1}{20}$

$P(1V2B) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} + \frac{2}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{1}{8} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{8} \times \frac{3}{8} = 3\times \frac{3\times2\times1}{10\times9\times8} = \frac{1}{40}$

Il est impossible d'avoir 3 boules bleues.

On peut vérifier: $\frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{120} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} = \frac{10+30+20+15+5+30+1+6+3}{120}$

$= \frac{120}{120} = 1$

Issues	3R	2R1V	2R1B	1R2V	1R2B	1R1V1B	3V	2V1B	1B2V	Total
probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	1

III- Quelques exercices

Exercice 1

1) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Déterminer la probabilité de tirer

un roi

un cœur

un roi ou un cœur

le roi de cœur

Réponses:

L'univers est l'ensemble des 32 cartes.

On tire au hasard ..., on est donc dans l'hypothèse d'équiprobabilité.

P(un roi) = $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

P(cœur) = $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

P(roi ou cœur) = $\frac{11}{32}$ (Ne pas compter deux fois le roi de cœur)

P(roi cœur) = $\frac{1}{32}$

Exercice 2

2) Dans une boîte, il y a un quart de jetons blancs, un tiers de jetons noirs et le reste est composé de jetons rouges. On tire au hasard un jeton.

Déterminer la probabilité des événements suivants:

A : " le jeton est blanc "

B : " le jeton n'est pas rouge "

C : " le jeton est rouge ou le jeton est noir "

$\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$.

Réponses:

L'univers est l'ensemble des jetons.

On ne connaît pas le nombre de jetons, mais, on connaît les proportions.

jetons blancs	jetons noirs	jetons rouges	boîte de jetons
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	Reste = $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)$ $= 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$	1

On tire au hasard ..., on est donc dans l'hypothèse d'équiprobabilité.

A: " le jeton est blanc " $P(A) = \frac{1}{4}$

B: " le jeton n'est pas rouge " $P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$.

C: " le jeton est rouge ou le jeton est noir "

Comme aucun des jetons est à la fois rouge et noir, on a: $P(C) = \frac{5}{12} + \frac{1}{3} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$\overline{A}$: " le jeton n'est pas blanc ", soit " le jeton est rouge ou le jeton est noir "

$P(\overline{A}) = P(C) = \frac{3}{4}$ (Remarquer: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$)

$\overline{B}$: " le jeton est rouge "

$P(\overline{B}) = \dfrac{5}{12}$ (Remarquer: $P(B) + P(\overline{B}) = 1$)

$\overline{C}$ " le jeton n'est ni rouge, ni noir ". $\overline{C}$ = " le jeton est blanc " $P(\overline{C}) = P(A) = \dfrac{1}{4}$.

Remarquer: $P(C) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

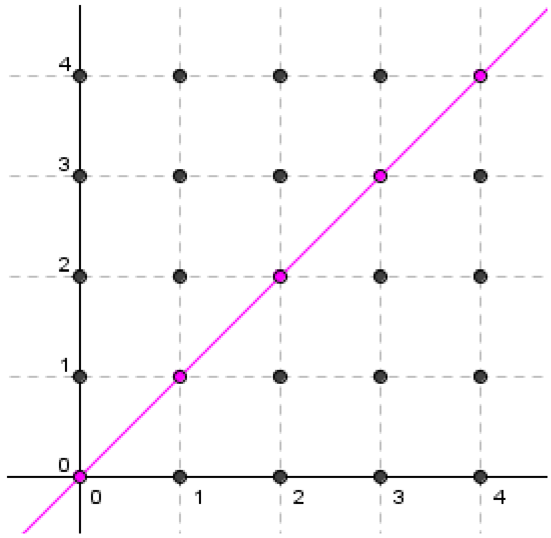
Exercice 3

On choisit au hasard dans un repère un point à coordonnées entières comprises entre 0 et 4.

Quelle est la probabilité d'avoir un point de la droite Δ d'équation $y = x$.

Réponse: Sur les 25 points à coordonnées entières comprises entre 0 et 4, 5 points sont sur la droite Δ.

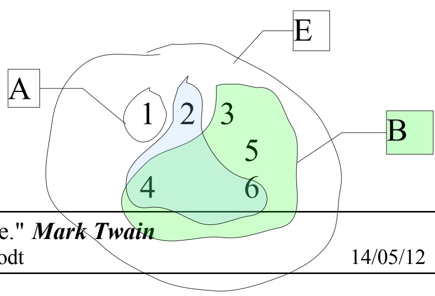
P(point de Δ) = $\dfrac{1}{5}$

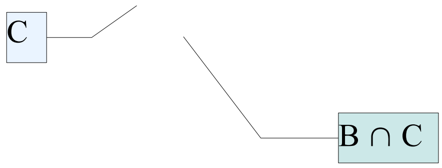


Exercice 4

On lance un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
On définit les événements:
A: " obtenir le numéro 1 "
B: " obtenir un nombre strictement supérieur à 2 "
C: " obtenir un nombre pair "
a) Écrire les événements sous forme ensembliste, et, représenter à l'aide d'un schéma.
b) Déterminer A ∪ B, B ∩ C et, représenter sur le schéma.
c) Donner les probabilités de A, de B, de C, de A ∪ B, de B ∩ C.

Réponses:
A = {1}
B = {3; 4; 5; 6}
C = {2; 4; 6}





A ∪ B = {1; 3; 4; 5; 6}
B ∩ C = {4; 6}
P(A) = $\frac{1}{6}$, P(B) = $\frac{2}{3}$, P(C) = $\frac{1}{2}$, P(A ∪ B) = $\frac{5}{6}$, P(B ∩ C) = $\frac{1}{3}$.

Exercice 5

Dans un groupe de 20 personnes, 10 personnes s'intéressent à la pêche, 8 à la lecture et 5 personnes ne s'intéressent ni à la pêche, ni à la lecture.

On prend une personne du groupe au hasard.

Probabilité pour que cette personne

- s'intéresse au moins à l'une des deux activités

- aux deux activités.

Réponses:

La négation de " s'intéresse au moins à l'une des deux activités " est " ne s'intéresse à aucune des deux activités "

P(" s'intéresse au moins à l'une des deux activités ") = 1 – P(" ne s'intéresse à aucune des deux activités ")

$$= 1 - \frac{5}{20} = \frac{15}{20}$$

Autre méthode: P pour Pêche, L pour Lecture

	L	$\overline{L}$	Total
P	$P \cap L$ 3	$P \cap \overline{L}$ 7	10
$\overline{P}$	$\overline{P} \cap L$ 5	$\overline{P} \cap \overline{L}$ 5	10
Total	8	12	20

P(" s'intéresse au moins à l'une des deux activités ") = $\frac{3+5+7}{20}$

P(" s'intéresse aux deux activités ") = P(Pêche ET Lecture) = $\frac{3}{20}$

Exercice 6

On lance deux dés bien équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6. L'un est rouge et l'autre est vert.

a) Utiliser un tableau pour écrire toutes les issues de cette expérience.

b) Soit les événements:

A : " les deux numéros sont identiques "

B : " la somme des deux numéros est strictement supérieure à 7 "

Déterminer les probabilités des événements *A*, *B* et *A* ∩ *B*

c) Déterminer de deux façons différentes *p*(*A* ∪ *B*).

Réponses:

a)

Dé vert \ Dé rouge	1	2	3	4	5	6
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)
2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)
3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)
4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)
6	(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)

b) les éléments de A sont sur fond magenta.

On a $p(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

Les éléments de B sont surlignés en vert

$p(B) = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

Les éléments de $A \cap B$ sont surlignés en vert **et** sur fond magenta.

$p(A \cap B) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

c) Première méthode:

En cherchant tous les éléments de $A \cup B$.

Les éléments de $A \cup B$ sont surlignés en vert **ou** sur fond magenta.

$p(A \cup B) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

Deuxième méthode:

En appliquant la formule:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{6}{36} + \frac{15}{36} - \frac{3}{36} = \frac{18}{36}$$

Exercice 7

Une urne contient 100 boules numérotées 00, 01, 02, ..., 99.

On tire une boule au hasard et on lit le numéro.

Soit les événements: A : " le chiffre 0 figure dans le numéro ", B : " le chiffre 9 figure dans le numéro "

a) Déterminer les probabilités des événements A et B.

b) Quelles sont les issues qui réalisent l'événement $A \cap B$.

c) En déduire la probabilité de $A \cup B$.

Réponses :

a) L'événement A contient les dix éléments 00 à 09, et les 9 éléments 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90

$p(A) = \dfrac{19}{100}$

L'événement B contient les 9 éléments 09, 19, 29, ..., 89 et les dix éléments 90 à 99.

$\mathrm{p}(B) = \frac{19}{100}$

b) Les issues qui réalisent $A \cap B$ sont: {09; 90}

$p(A \cap B) = \frac{2}{100}$.

c) On en déduit: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{19}{100} + \frac{19}{100} - \frac{2}{100} = \frac{36}{100}$