Index

Dans ce chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I.

Objectif: il s'agit de traduire l'**action** d'une **fonction numérique** sur la relation d'ordre, c'est-à-dire :

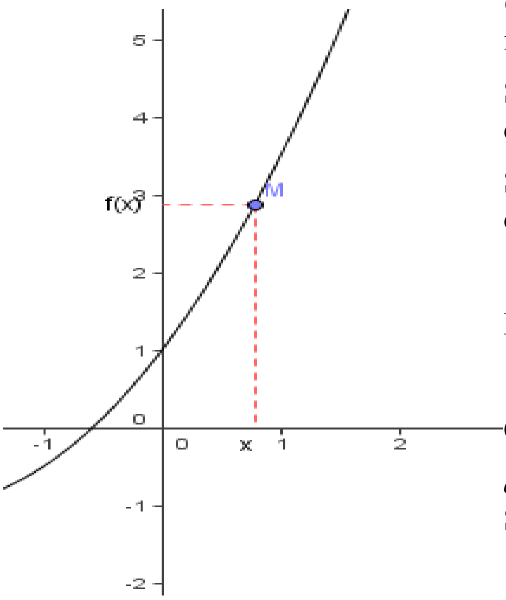
au départ, on a deux nombres (antécédents) classés dans un certain ordre,

on applique la fonction

on obtient à l'arrivée des nombres (les images) et on observe leur ordre.

I- Lecture graphique

I-1- Fonction croissante sur un intervalle



Compléter les phrases : Lorsqu'on déplace x sur l'axe des abscisses, son image $f(x)$ se déplace sur l'axe des ordonnées.

Si x se déplace de la gauche vers la droite (x …............) alors $f(x)$ se déplace de …...

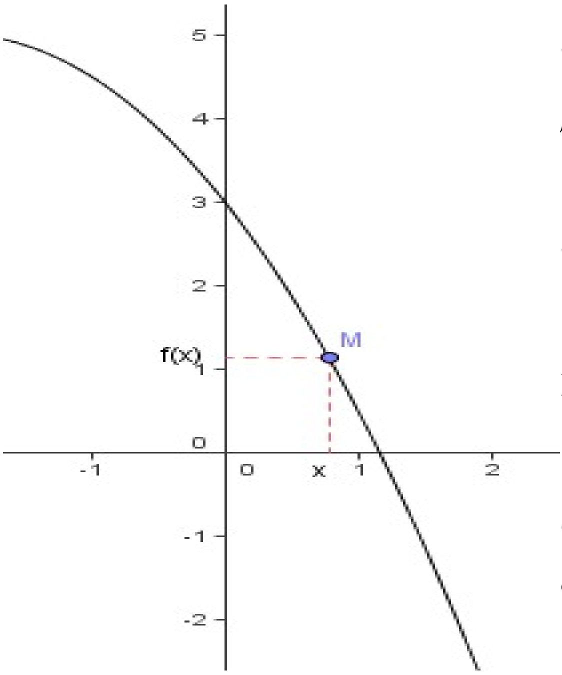
Si x se déplace de la droite vers la gauche (x …...............) alors $f(x)$ se déplace de …..

La variable et son image se déplacent dans le même …........................

Compléter par des symboles d'inégalité:

a et b sont deux nombres réels lus sur l'axe des abscisses
Si a ….... b alors $f(a)$ ….......... $f(b)$

I-2- Fonction décroissante.



Compléter les phrases : Lorsqu'on déplace x sur l'axe des abscisses, son image $f(x)$ se déplace sur l'axe des ordonnées.
Si x se déplace de la gauche vers la droite (x …......................) alors $f(x)$ se déplace de
…...

Si x se déplace de la droite vers la gauche (x …........................)
alors $f(x)$ se déplace de
…..

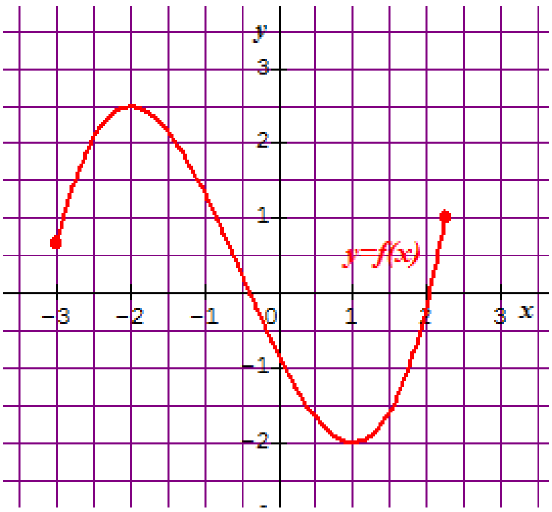
La variable et son image se déplacent dans
…......................................

Compléter par des symboles d'inégalité:

a et b sont deux nombres réels lus sur l'axe des abscisses
Si a ….... b alors $f(a)$ …............ $f(b)$

I- 3- Extremum: maximum, minimum

Le graphique ci-dessous représente une fonction f définie sur un intervalle I.



La valeur maximale sur I de $f(x)$ est …......................................

La valeur minimale sur I de $f(x)$ est …..

Pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

Pour tout x de I, $f(x) \geqslant f(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

On dit que :

Le maximum de la fonction f sur I est …............................... atteint en …..............................

Le minimum de la fonction f sur I est …............................... atteint en …..............................

I-4- Tableaux de variations

On peut résumer les informations dans un tableau appelé tableau de variations de la fonction f.

x	-3		-2		1		$2{,}25$
$f(x)$	$0{,}75$	$\nearrow$	$2{,}5$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1

Exercice:

On sait qu'une fonction définie sur l'intervalle $[-2; 5]$ est strictement croissante sur les intervalles $[-2; 1]$ et $[3;5]$ et qu'elle est strictement décroissante sur l'intervalle $[1; 3]$, et que $f(-2) = -3$, $f(1) = 1{,}5$, $f(3) = -4$ et $f(5) = 1$.

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2) Construire sur un même graphique trois courbes susceptibles de représenter la fonction f .

3) Compléter lorsque c'est possible par un symbole d'inégalités:

$f(0)$ ………. $f(0{,}5)$

$f(\sqrt{2})$ …….. $f(1{,}5)$

$f(\pi)$ ………… $f(3{,}2)$

$f(0{,}75)$ ….. $2{,}5$

$f(\frac{\pi}{2})$ …… 1

$f(-1{,}5)$ …… $f(1{,}3)$

4) a) Quel est le maximum de f sur l'intervalle $[-2; 5]$?

b) Quel est le minimum de f sur l'intervalle $[-2; 5]$?

c) Pour tout $x \in [-2; 5]$, on a: ………….. $\leqslant f(x) \leqslant$ ……………….

II- Les définitions

II-1- Fonction croissante

Définition :

On dit que f est une fonction strictement croissante sur un intervalle I lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:

Pour tous α et β de I, si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) < f(\beta)$

ou encore

les variables et leurs images sont classées dans le même ordre

Une fonction **strictement croissante** sur un intervalle I **conserve** l'ordre.

II-2- Fonction décroissante

Définition :

On dit que f est une fonction strictement décroissante sur un intervalle I lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:

Pour tous α et β de I, si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) > f(\beta)$

ou encore

les variables et leurs images sont classées dans l'ordre inverse.

Une fonction **strictement décroissante** sur un intervalle I **inverse** l'ordre.

II-3- Fonction monotone

Définition :

On dit qu'une fonction est ***monotone sur un intervalle*** lorsqu'elle ne change pas de variations sur cet intervalle.

II-4- Étudier les variations

Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles où la fonction est croissante et ceux où la fonction est décroissante.

II-5- Extremum

II-5-1 Maximum

Définition :

On dit que $f(x_0)$ est un **maximum** de f sur l'intervalle I lorsque pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Remarque: le maximum M_{ax} est une valeur image (lue en ordonnée)

Elle est atteinte en a (valeur lue en abscisse). On a alors $f(a) = M_{ax}$

Le point de coordonnées $(a; M_{ax})$ est le point " le plus haut " sur la courbe.

II-5-2- Minimum

Définition :

On dit que $f(x_0)$ est un **minimum** de f sur l'intervalle I lorsque pour tout x de I, $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Remarque: le minimum m_{in} est une valeur image (lue en ordonnée)

Elle est atteinte en a (valeur lue en abscisse). On a alors $f(a) = m_{in}$

Le point de coordonnées $(a; m_{in})$ est le point " le plus bas " sur la courbe.

II-5-3- Extremum

Définition :

Un **extremum** est un maximum ou un minimum de f.

Exercice:

Énoncé:
Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$ a un extremum qui vaut -1.
Préciser si cet extremum est un maximum ou un minimum.

III- Une méthode pour étudier les variations. (Deux exemples commentés)

III-1- Exemple 1

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = -2x + 1$

On prend deux réels a et b tels que $a < b$

$a < b$ En multipliant par (-2) qui est strictement négatif, l'ordre .... et on obtient:
$-2a$ .... $-2b$ En ajoutant 1, l'ordre ne change pas, on obtient:
$-2a + 1$ .... $-2b + 1$
C'est-à-dire :
$f(a)$ .... $f(b)$
On a montré: si $a < b$ alors $f(a)$ .... $f(b)$
La fonction f est strictement .... sur ℝ.
Résumé dans un tableau de variations:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	

III-2- Exemple 2

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^2 + 1$

On prend deux réels a et b tels que $a < b$ et on cherche le signe de la différence $f(b) - f(a)$.

$f(b) - f(a) = (b^2+1) - (a^2+1) = b^2 - a^2 =$ ....

Or, comme $a < b$, on a : $b - a$ ....

Il reste à étudier le signe de la somme $b + a$.

Rappel :

On sait que si les deux termes a et b de la somme sont positifs alors la somme $b + a$ est ...., et, que si les deux termes a et b de la somme sont négatifs alors la somma $b + a$ est ....

Conséquence : il faut distinguer deux cas.

Premier cas :

si $0 \leqslant a < b$ alors $b + a > 0$ et $f(b) - f(a) > 0$, soit, $f(a) < f(b)$, et

Deuxième cas :

si $a < b \leqslant 0$ alors $b + a < 0$ et $f(b) - f(a) < 0$, soit, $f(a) > f(b)$

On a montré: Sur $[0;+\infty[$, la fonction f est strictement croissante.

Sur $]-\infty; 0]$, la fonction f est strictement décroissante.

Résumé dans un tableau de variations:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

IV- Utilisation des variations (Des exemples commentés)

IV-1- Pour comparer des images

On sait que f a le tableau de variations suivant:

x	-2	$-\sqrt{2}$	$-1{,}2$	1	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}+1$	3	$4{,}789$	$4{,}79$	5
$f(x)$	-3	↗		$1{,}5$	↘		-4	↗		1

Si on prend deux réels dans un intervalle où la fonction reste monotone, on peut alors comparer leurs images.

Énoncé : Comparer

$f(-\sqrt{2})$.................$f(-1{,}2)$ ***Preuve*** : ....

$f(\sqrt{2}+1)$ .... $f(\sqrt{5})$, ***Preuve*** : ....

$f(4{,}789)$ ....$f(4{,}79)$, ***Preuve*** : ....

$f(0)$ ......$f(2)$ ***Preuve*** : ....

$f(-1)$ ...... -4 ***Preuve*** : ....

$f(\pi)$ ...... $1{,}5$ ***Preuve*** : ....

IV-2- Pour encadrer

Quand on connaît les extremums de f sur un intervalle I, pour toute valeur x de I, on a:

minimum $\leqslant f(x) \leqslant$ maximum.

Exemple : Dans le §IV-1 précédent, on peut écrire :

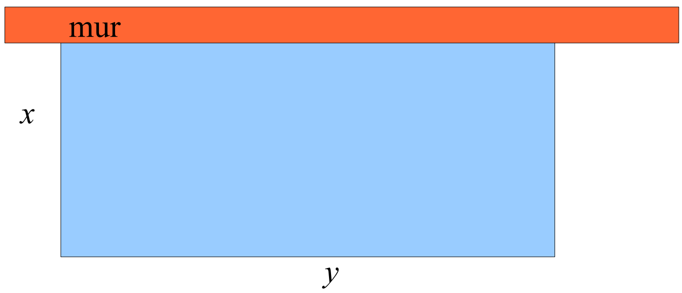
pour tout $x \in$ ...., on a : .... $\leqslant f(x) \leqslant$ ....

IV-3- Problème d'optimisation

Dans les problèmes où une grandeur (prix, longueur, aire, volume ...) dépend d'une autre grandeur variable, on cherche à optimiser lorsqu'on cherche pour quelle valeur on aura un minimum ou un maximum selon le problème.
Obtenir le bénéfice maximal ou un coût minimal de production.
Avoir le plus grand volume d'un récipient avec le moins de métal ...

Exemple:
On veut clôturer un terrain rectangulaire sur trois côtés (l'autre côté est par exemple le long d'un mur) avec une longueur fixée (100 mètres) de clôture et obtenir la plus grande surface possible.

Une méthode :
On choisit une longueur variable et on exprime l'aire (mesure de la surface) en fonction de cette variable.
On obtient alors une fonction exprimant l'aire, et on détermine les extremums de cette fonction.



L'aire du rectangle xy

La longueur de la clôture $2x + y$.

Résolution :
On pose x et y les deux dimensions en mètres du rectangle.
Exprimer alors la longueur y en fonction de x et l'aire $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.

Solution :
on a: $2x + y = 100$, soit $y = 100 - 2x$.

L'aire est $\mathscr{A}(x) = xy = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$

On a donc une fonction $\mathscr{A}$ qui donne l'aire du terrain en fonction d'une des dimensions.
On montre que $-2x^2 + 100x \leqslant 1250$
En effet, $-2x^2 + 100x - 1250 = -2(x^2 - 50x + 625) = -2(x-25)^2$ qui est négatif ou nul.
Comme $f(25) = 1\,250$, on a montré:

L'aire est maximale lorsque $x = 25$ mètres et donc $y = 100 - 2\times 25 = 50$ mètres.