Index

I- Quelques définitions (vocabulaire) et premières propriétés.

I-1- Direction:

On dit que deux droites (ou deux segments) ont la même direction lorsqu'elles sont parallèles.

Remarque:

Dans un repère, les droites parallèles ont le même coefficient directeur.

I-2- Sens:

On peut parcourir la droite dans deux sens opposés.

Attention, en mathématiques, Nantes-Saint-Nazaire et Saint-Nazaire-Nantes ont la même direction, mais sont de sens opposés

I-3- Vecteur:

Un vecteur est un objet mathématique qu'on peut définir par ces trois propriétés:

- une direction
- un sens
- une longueur

On note $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ ou $\overrightarrow{\text{nom}}$, et, on lit " vecteur u " ou " vecteur v "

Conséquences de cette définition:

Vecteurs égaux:

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même direction, le même sens, la même longueur.

Construction:

Un représentant d'un vecteur est construit en tenant compte de ces trois propriétés définissant le vecteur.

Sur un quadrillage, construire un représentant d'un vecteur $\vec{u}$.

Construire deux autres représentants du vecteur $\vec{u}$.

Construire deux vecteurs de même direction, de même sens qui ne sont pas égaux.

Construire deux vecteurs de même longueur qui ne sont pas égaux.

Construire deux vecteurs de même direction, de sens opposés et de même longueur.

II- Observation: (pour définir ce qu'est une translation)

II-1- Énoncé:

Soit A et B deux points donnés dans le plan.

À tout point C du plan, on associe un point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

Faire plusieurs constructions avec notamment des cas où $A = B$, A, B et C alignés, avec $C = A$, avec $C = B$.

Qu'observez-vous?

II-2- Translation:

définition:

A et B sont deux points donnés dans le plan.

On dit que le point D associé au point C tel que $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

quelques conséquences

1) Quel est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?

2) Si D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, définir la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

3) Que se passe-t-il si $B = A$?

4) Comment peut-on définir la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$?

III- Vecteurs et opérations

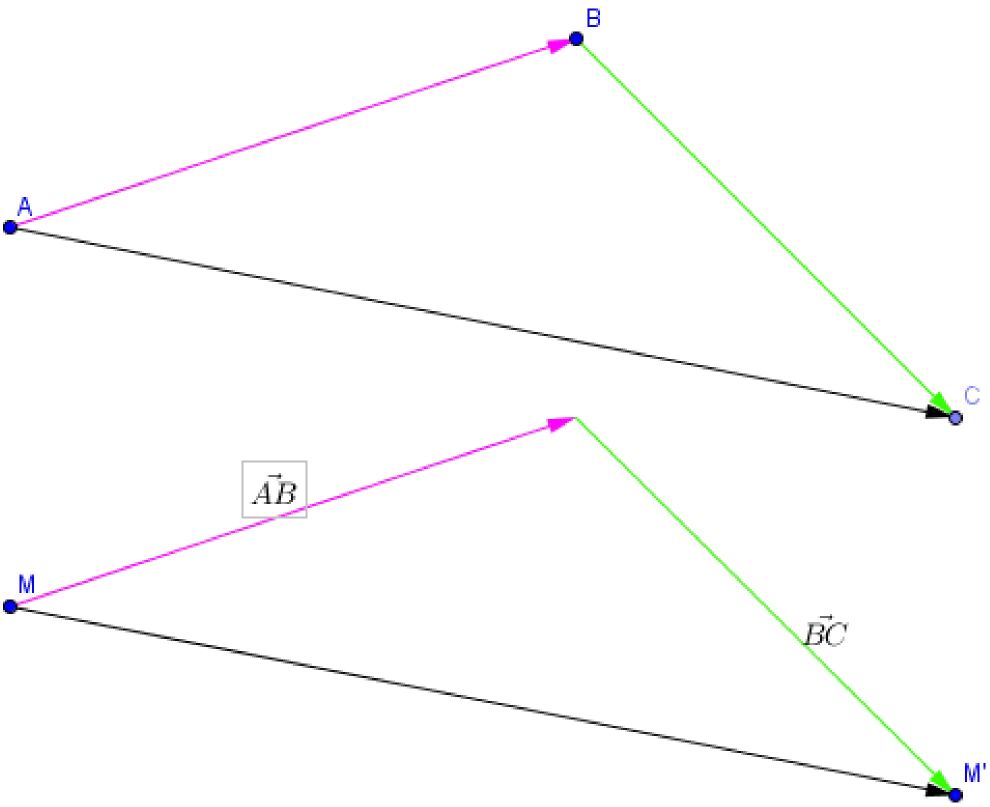
III-1- Somme de deux vecteurs

Vers une définition

1) On considère trois points A, B et C.

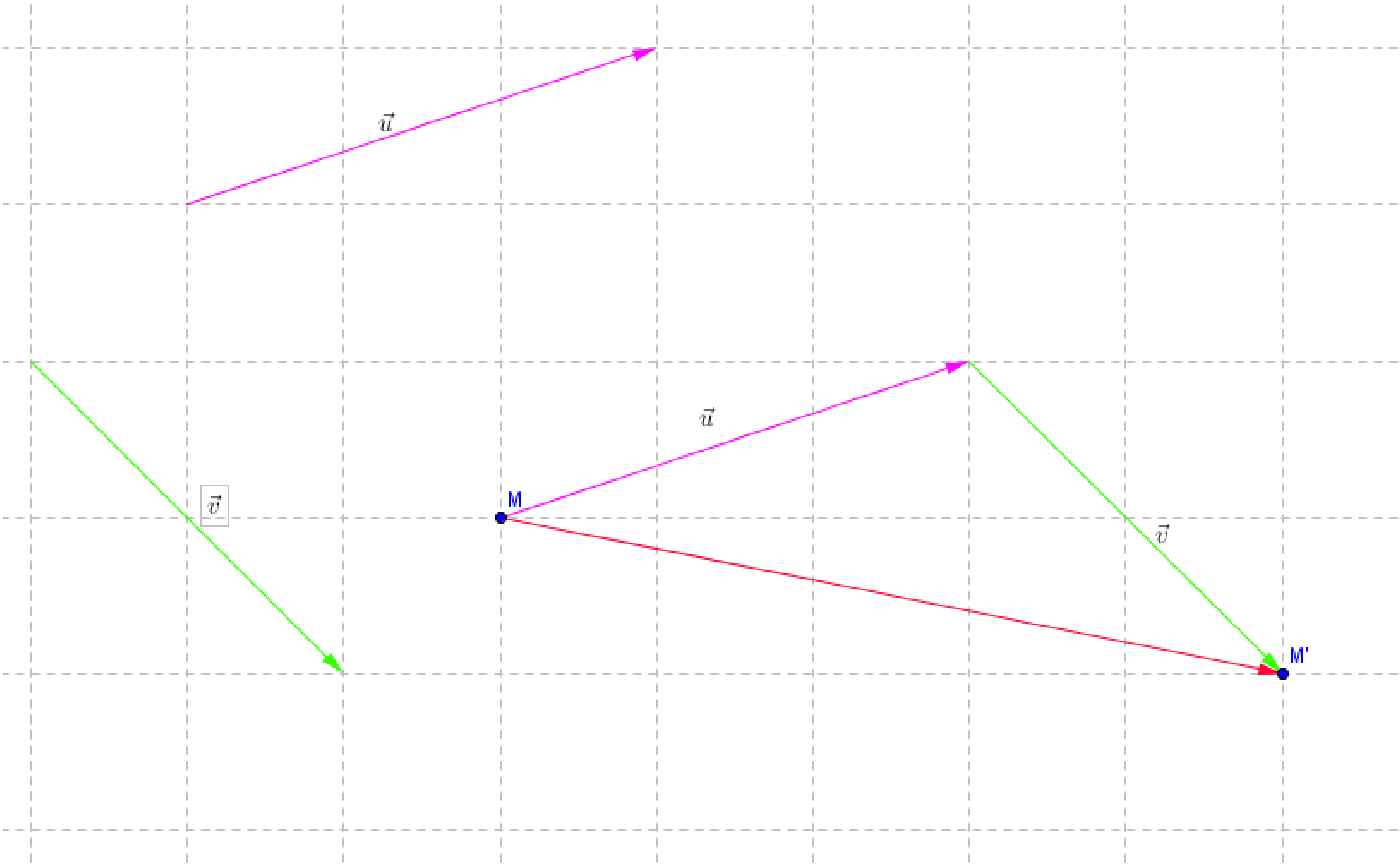
Soit un point M quelconque dans le plan.

Construire le point M' image de M en appliquant successivement les translations de vecteurs respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.



2) On se donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Construire le point M' image de M en appliquant successivement les translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

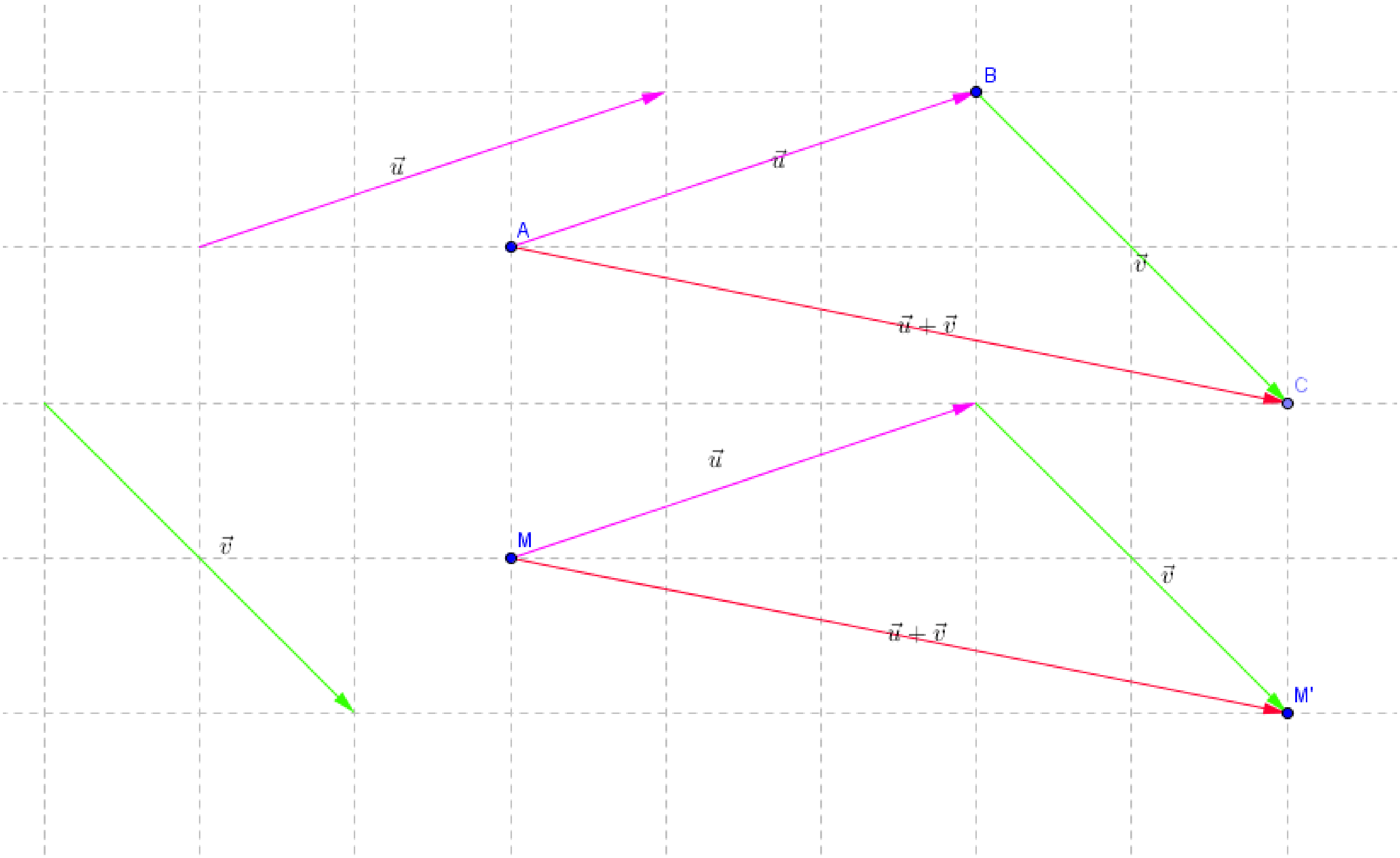


Définition

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.



Propriétés

Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Somme et parallélogramme

a) Si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ alors $ABCD$ est un parallélogramme (même aplati)

b) Si $ABCD$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

III-2- Opposé d'un vecteur

Recherche d'une définition

Comme pour l'addition des nombres réels, on a un élément nul.

Le vecteur nul, noté $\vec{0}$, est tel que pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

On cherche alors comment définir un vecteur appelé, opposé de $\vec{u}$, tel que $\vec{u}$ + (opposé de $\vec{u}$) = $\vec{0}$.

Ce vecteur sera noté $-\vec{u}$.

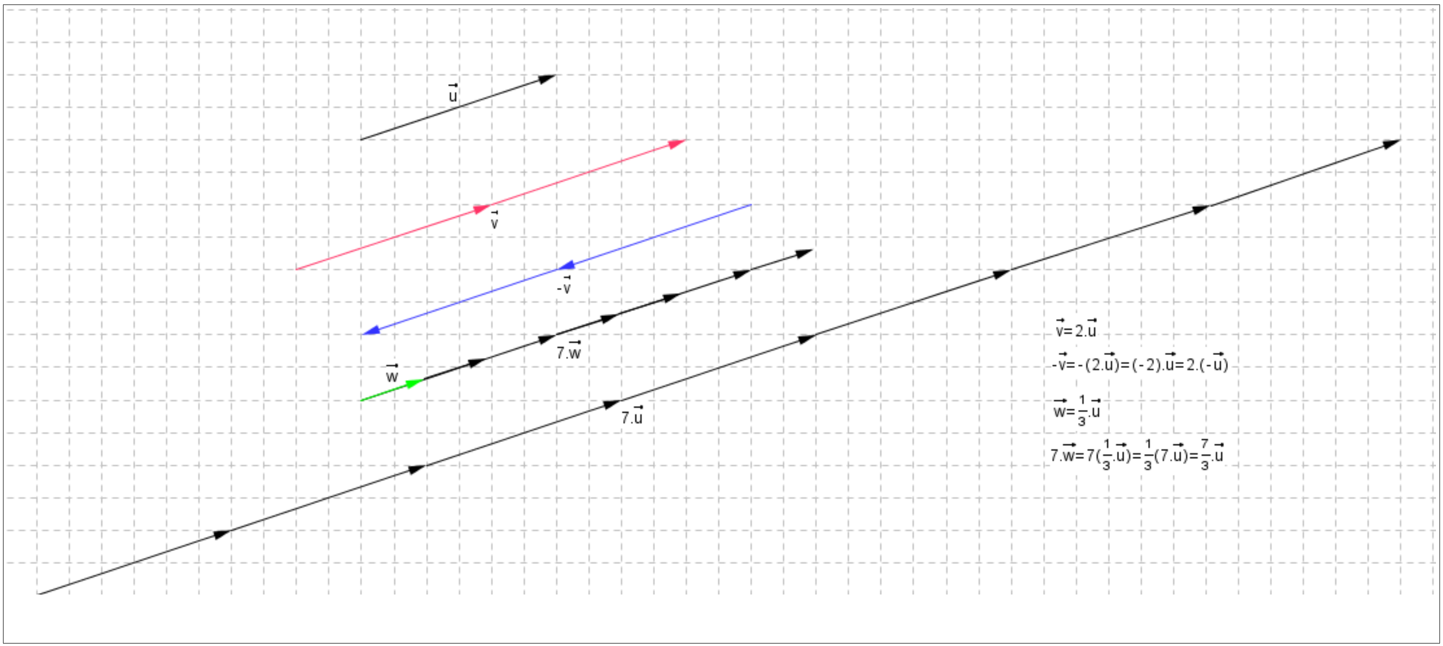
Quel est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$?

La différence de deux vecteurs $\vec{u} - \vec{v}$ est définie par la somme $\vec{u} + (-\vec{v})$

III-3- Multiplication d'un vecteur par un réel

Observations

Construire un vecteur $\vec{u}$, puis $\vec{u}+\vec{u}$;



Il est naturel de noter $2\vec{u} = \vec{u}+\vec{u}$.

Le vecteur $\vec{v} = 2\vec{u}$ est donc un vecteur de même direction, de même sens et de longueur double de celle de $\vec{u}$

D'après ce qui précède –($2\vec{u}$ *)* est l'opposé de $\vec{v}$ et est donc un vecteur de même direction, de sens contraire et de longueur double de celle de $\vec{u}$.

On obtient le même vecteur en construisant $2(-\vec{u}) = -\vec{u} - \vec{u}$

D'autre part, il paraît naturel de poser en ce cas: $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$

De même construire, $\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{u}$, puis, $\vec{x} = \frac{1}{3}(7\vec{u})$ et comparer avec $7\vec{w}$ et avec $\frac{7}{3}\vec{u}$.

Il semble que: $\frac{1}{3}(7\vec{u}) = 7\left(\frac{1}{3}\vec{u}\right) = \frac{7}{3}\vec{u}$

Ces observations amènent la définition suivante.

Définition

* Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k , noté $k.\vec{u}$, est **le vecteur** $\vec{v}$ défini par:

- la direction de $\vec{v}$ est celle du vecteur $\vec{u}$
- le sens de $\vec{v}$ est celui de $\vec{u}$ lorsque $k > 0$ et est opposé à celui de $\vec{u}$ lorsque $k < 0$.
- la norme (ou longueur) de $\vec{v}$ est égale à celle de $\vec{u}$ multipliée

  par k si $k \geqslant 0$

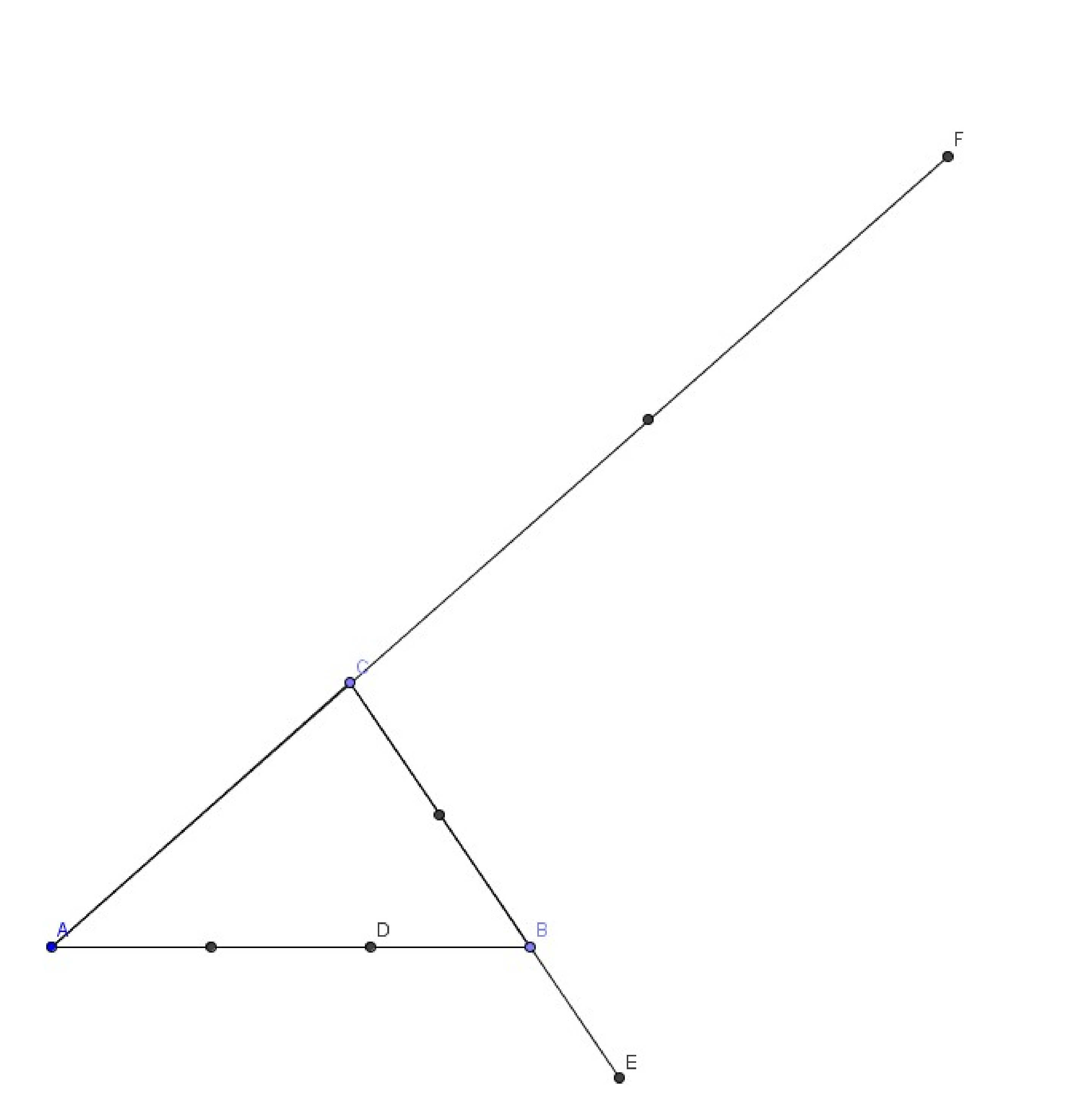
  par $-k$ si $k < 0$.

** Si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ alors $k.\vec{u} = \vec{0}$

Exercice: Soit le triangle ABC avec $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 4$.

Construire les points D, E, F définis par: $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{AC}$.

Calculer les longueurs AD, BE et AF.



Le point D est sur le segment $[AB]$ tel que $AD = \dfrac{2\times 6}{3} = 4$

Le point E est sur la droite (BC) à l'extérieur du segment $[BC]$ tel que $BE = \dfrac{4}{2} = 2$

Le point F est sur la droite (AC) à l'extérieur du segment $[AC]$ tel que $CF = 2\times 5 = 10$

Comme $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$, on en déduit: $\overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CA} = 2\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AC}$ et $AF = 15$

Propriétés des opérations

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, k et k' deux réels.

$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

$(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

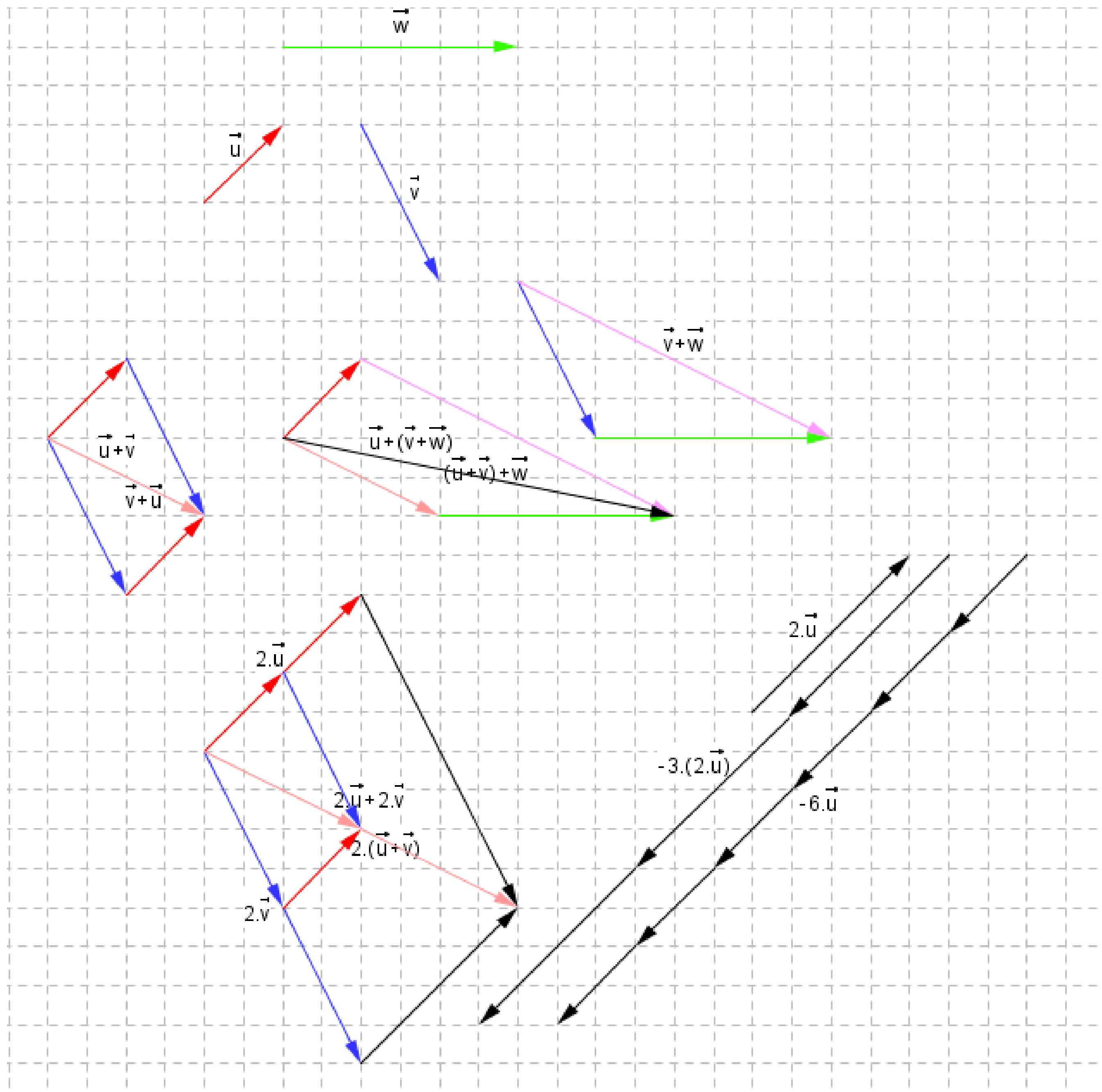
$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

Remarque:

Soit $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}$ $\begin{cases} \text{si } 0<k<1, \text{ alors } M \in [AB] \\ \text{si } k<0, \text{ alors } M \notin [AB) \\ \text{si } k>1, \text{ alors } M \in [AB) \text{et } M \notin [AB] \end{cases}$

$(k \times k').\vec{u} = k.(k'.\vec{u})$ où $\times$ est la multiplication dans les réels et . est la multiplication d'un vecteur par un réel.

Illustration des propriétés $k = 2$, $k' = -3$



IV- Coordonnées d'un vecteur

IV- 1- Objectif: créer une définition

On se place dans un repère $(O; I, J)$.

On connaît les cordonnées de deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

On cherche comment on peut définir les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Construire le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

On pose x et y les coordonnées du point M.

Placer le centre K du parallélogramme obtenu.

Comme K est le milieu de [OB], on a: $\begin{cases} x_K = \dots \\ y_K = \dots \end{cases}$

Comme K est le milieu de [AM], on a: $\begin{cases} x_K = \dots \\ y_K = \dots \end{cases}$

Par comparaison, on en tire les égalités: …..

Conclusion: $\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$

IV- 2- définition

Dans un repère (O; I, J), les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont les coordonnées du point M.

IV-3- Propriété

Dans un repère (O; I, J), on considère les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

IV-4- Opérations avec les coordonnées

On connaît les coordonnées de deux vecteurs dans un repère, $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$

Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$? $\vec{u}+\vec{v}$ $\begin{pmatrix} X+X' \\ Y+Y' \end{pmatrix}$

du vecteur $k\ \vec{u}$? $k\ \vec{u}$ $\begin{pmatrix} kX \\ kY \end{pmatrix}$

V- Colinéarité de vecteurs

Définition

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel

autrement dit:

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{v} = k.\vec{u}$

autrement dit:

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.

Remarque: le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout autre vecteur.

Applications aux points

Les propriétés suivantes sont des conséquences directes de la définition.

Parallélisme

A, B, C, D sont quatre points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Alignement

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Milieu d'un segment

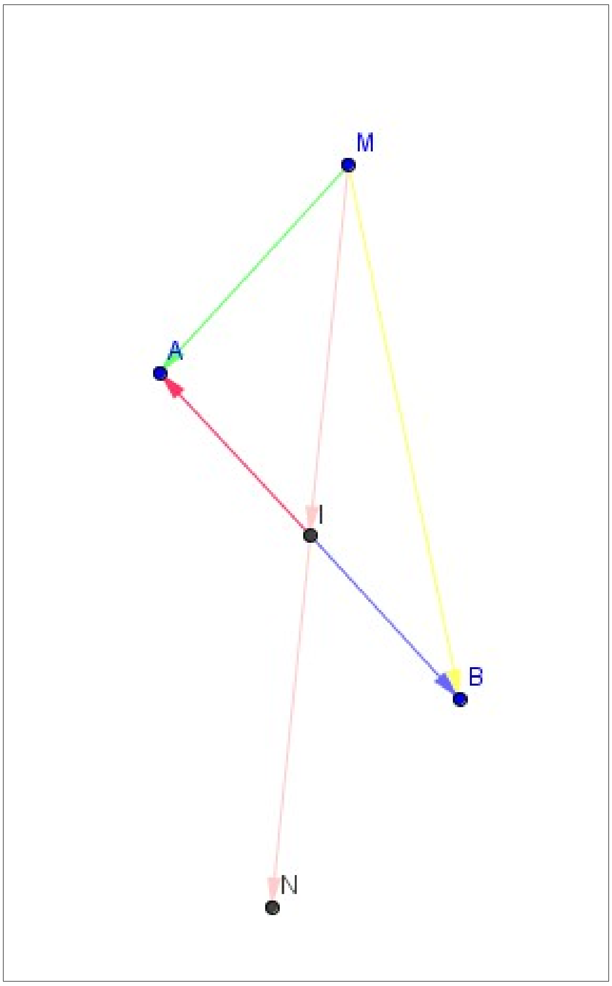
Les quatre propositions suivantes sont équivalentes:

(i) I est le milieu du segment $[AB]$

(ii) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

(iii) $\overrightarrow{AB} = 2.\overrightarrow{AI}$

(iv) Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2.\overrightarrow{MI}$



Démonstration:

Pour démontrer ces équivalences, on peut montrer (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) ⇒ (i)

(i) ⇒ (ii)

Donnée: I est le milieu du segment $[AB]$

d'où, $I \in [AB]$ et $AI = IB$

Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ ont donc la même direction, des sens opposés et sont de même longueur (norme).

Conclusion: $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont opposés et $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

(ii) ⇒ (iii)

Donnée: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles, on a: $\overrightarrow{IA} + (\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}) = \vec{0}$, ce qui mène à:

Conclusion: $\overrightarrow{AB} = 2.\overrightarrow{AI}$

(iii) ⇒ (iv)

Donnée: $\overrightarrow{AB} = 2.\overrightarrow{AI}$

On peut encore utilise la relation de Chasles:

Pour tout point M, on a: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB} = 2(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MI})$. En développant et en réorganisant, il vient:

Conclusion: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2.\overrightarrow{MI}$

(iv) ⇒ (i)

Donnée: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2.\overrightarrow{MI}$

La propriété est vraie pour tout M, elle est donc vraie pour $M = I$, ce qui donne $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$,

ou encore:

$\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AI}$

Les points A, I, B sont donc alignés et $AI = IB$.

Conclusion: I est le milieu du segment $[AB]$

Remarque: Pour cette dernière proposition, penser au parallélogramme.

La somme $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ amène la construction du parallélogramme $MABN$ et I est le milieu de la diagonale $[MN]$

Centre de gravité d'un triangle

Soit un triangle ABC. A' est le milieu de $[BC]$

G est le centre de gravité du triangle ABC

si et seulement si $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

si et seulement si $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

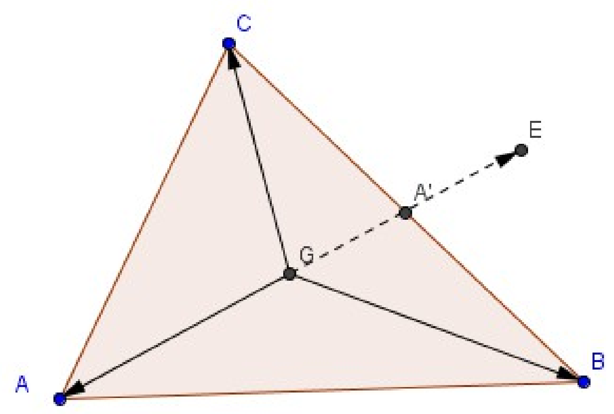


Illustration: La somme $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GE}$

$GBEC$ est donc un parallélogramme de centre A'.

$\overrightarrow{GE} = -\overrightarrow{GA}$

V-3- Relation de colinéarité dans un repère

On connaît les coordonnées de deux vecteurs dans un repère, $\vec{u}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$.

On sait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Que peut-on dire de leurs coordonnées ?

Il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$, d'où, $\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}kX\\kY\end{pmatrix}$

Les suites de coordonnées sont des suites proportionnelles.

Ce tableau

X	X'
Y	Y'

est un tableau de proportionnalité.

La réciproque est-elle vraie ? Oui, en effet :

Si les suites de coordonnées sont des suites proportionnelles alors il existe un réel k tel que : $\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}kX\\kY\end{pmatrix}$

On a donc : $\vec{v} = k\ \vec{u}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

V-3-1- Propriété : (Par cœur)

Deux vecteurs $\vec{u}\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\ \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $XY' = X'Y$.

V-3-2- Applications aux droites dans un repère

Un point $M(x\ ;\ y) \in (AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

On écrit les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$.

On écrit les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

On applique la relation du §V-3-1.