Index

I- Définition

I-1 Rappel

Écrire les carrés des nombres suivants:

nombre	0	1	–1	0,5	0,25	–0,25	0,7	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{7}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}+1$
son carré											

Existe-t-il des réels qui n'ont pas de carré?.................................Si oui, le(s)quel(s)?...................................

Soit x un réel, son carré est le réel ....

Que peut-on dire du signe du carré d'un réel?..

Un réel A ***positif*** étant donné, combien existe-t-il de réels a tels que $a^2 = A$? ....

Comment se notent ces réels en fonction de A?

I-2 Définition:

(Une définition s'apprend précisément. Chaque mot, chaque lettre, chaque symbole est important)

La **fonction carré** est la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ (ou $\mathbb{R}$) qui, à un réel, associe son carré.
On note $x \longmapsto x^2$ ou $t \longmapsto t^2$ ou ....

II- Une propriété de la fonction carré:

II-1 Observation

On note f la fonction carré
Trouver une relation entre $f(-x)$ et $f(x)$: ....

Remarque et définition:

On dit qu'une fonction f est une fonction paire lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:
Si $x \in E_f$ alors $-x \in E_f$ et $f(-x) = f(x)$.
Conséquence: la fonction carré est une fonction paire

II-2 Interprétation graphique de cette propriété

(Prendre la feuille à carreaux)

Soit f la fonction carré.
Dans un repère orthogonal, placer un point M quelconque. On suppose que M est un point de C_f d'abscisse x.
(Attention : on ne connaît pas encore C_f, on cherche à partir des définitions une ou des propriétés de la courbe, on raisonne donc sur un schéma).
Quelle est l'ordonnée de M ?...
Construire le point $M'(-x; f(-x))$.
Que peut-on dire de M et M' ? ....
Résultat:
La représentation graphique C_f de la fonction carré dans un repère orthogonal est …......................................
....

Remarque

Lorsqu'une fonction est paire alors sa représentation graphique dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et la réciproque est vraie.

III- Sens de variation de la fonction carré.

L'objectif du paragraphe est double :

- comprendre une méthode pour étudier les variations d'une fonction.

- l'appliquer à la fonction carré.

III-1 Rappel:

Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles où la fonction reste monotone (ne change pas de variations).

On étudie les variations d'une fonction sur un intervalle.
On doit pouvoir conclure : La fonction (*Nom de la fonction*) est croissante sur (*un intervalle à déterminer*)
La fonction (*Nom de la fonction*) est décroissante sur (*un intervalle à déterminer*).

III-2 Méthode (à connaître)

On choisit deux réels a et b sur .... tels que a …...... b
et on cherche …......……......……......…..... de $f(a)$ et $f(b)$
ou encore
on cherche le …................................ de $f(b) - f(a)$.

III-3 Calculs:

On note f la fonction carré

$f(b) - f(a) =$ ....

....

Soient $0 < a < b$

Comme a .... et b ...., la somme $a + b$ est ....

Comme $a < b$, la différence $a - b$ est ....;

Finalement: le produit .... est ....

Synthèse:

On a montré: Si $0 < a < b$ alors $f(a)$ .... $f(b)$

Conclusion: la fonction carré est .... sur ....

Qu'est-ce qui change quand on étudie la variation de la fonction carré sur $]-\infty; 0]$?

....

....

....

....

....

III-4 Résumé dans un tableau de variations

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
x^2	

IV- Représentation graphique de la fonction carré

L'objectif du paragraphe est double :

- ***comprendre une méthode pour construire la représentation graphique d'une fonction***

- l'appliquer à celle de la fonction carré.

IV-1 Tableau de valeurs:

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2			
x^2								

IV-2 Graphique

IV-2-1- Représentation graphique

Faire la représentation graphique de la fonction carré dans un repère.

IV-2-2- Définition

La représentation graphique dans un repère ($O; I, J$) de la fonction carré est une **parabole** de sommet $O(0; 0)$ et d'équation $y = x^2$.

L'axe des ordonnées est un .... de cette parabole.

V- Quelques calculs

V-1- Carré de somme et somme de carrés; produit …

a et b sont des réels quelconques.
f est la fonction carré.
Comparer $f(a + b)$ et $f(a) + f(b)$.
....
Comparer $f(3a)$ et $3f(a)$
....

V-2- Expression du second degré

V-2-1- Quelques calculs

Développer:

$(x - 1)^2 =$

....
$2(x- 1)^2 - 4 =$

....
$-3(x - 1)^2 - 4 =$
....

V-2-2- Définition: fonction polynôme du second degré

On appelle fonction polynôme du second degré une fonction qui peut s'écrire (sous forme développée)

$x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a est un réel non nul, b et c sont des réels.

Exemples:
1) Les fonctions
$x \mapsto 2x^2 + x - 1$, $x \mapsto -x^2 - 4$, $t \mapsto -3t^2 + 2t +1$ $n \mapsto 5n^2 - 8$
sont des fonctions polynômes du second degré.
Donner pour chacun de ces exemples les coefficients a, b, c.
....
....
....
....
2) Les fonctions
$x \mapsto x^3 + 2x^2 - 3x + 1$; $t \mapsto -\dfrac{1}{t} + t^2$; $z \mapsto -z + 1$ **ne sont pas** des fonctions polynômes du second degré.

V-3- Forme canonique:

On peut démontrer les résultats suivants: (Résultats à reconnaître : pouvoir les appliquer sur des exemples)
1) Les fonctions polynômes du second degré peuvent s'écrire sous la forme: $x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$ où a est un réel non nul, α et β sont des réels.
2) La représentation graphique de la fonction p: $x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$ est une parabole de sommet $\Omega(\alpha; \beta)$ et ayant pour **axe de symétrie** la droite d'équation $x = \alpha$ (droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par Ω)
(Très important pour faire des liens entre calculs algébriques et graphiques).

Conséquence importante pour déterminer les caractéristiques d'un polynôme du second degré :

Méthode sur un exemple :

Soit $f(x) = 3x^2 + 3x - 4$
Il est évident que $f(0) = -4$.
On cherche alors l'autre valeur telle que $f(x) = -4$ (*calculs niveau collège, puisque la factorisation est immédiate)*
Résolution de l'équation $f(x) = -4$
$3x^2 + 3x - 4 = -4$ équivaut à $3x^2 + 3x = 0$ équivaut à $x(3x + 3) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = -1$.
(Placer les points A(0 ; –4) et B(–1 ; –4) et tracer la médiatrice de [AB])
On a donc : $f(0) = f(-1) = -4$, d'où, $\alpha = \frac{0+(-1)}{2} = -\frac{1}{2}$ et $\beta = f(-\frac{1}{2}) = 3\times\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 4 = \frac{3-6-16}{4} = -\frac{19}{4}$.

Conclusion : $f(x) = 3x^2 + 3x - 4 = 3\left[x-\left(\frac{-1}{2}\right)\right]^2 - \frac{19}{4} = 3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{19}{4}$.

3) On peut résumer les variations dans un tableau de variations:

2 cas:

Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
p			

Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
p			

V-4- Exemples

V-4-1- Exemple 1

Soit la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 2x - 4$

Vérifier que $f(2) = 0$ et que $f(-1) = 0$.

....

En déduire l'axe de symétrie de la courbe C_f représentative de f.

....

Déterminer le tableau de variations de f.

....
....

V-4-2- Exemple 2

Soit la fonction $g : x \mapsto -x^2 + 4x - 5$

Vérifier que $g(1) = g(3) = -2$

....

En déduire l'axe de symétrie de la courbe C_g représentative de g.

....

Déterminer le tableau de variations de g.

....
....

VI- Utilisation de la fonction carré

Partie à rédiger dans le cahier de cours.

Ces exercices sont des exercices modèles ....

VI -1 Pour étudier certaines inéquations où intervient le carré d'un nombre.

Exemples: Résoudre dans ℝ (***l'utilisation d'un graphique est fortement conseillée***)

Partie I- a) $t^2 \leqslant 4$ b) $4 \leqslant t^2 \leqslant 9$ c) $t^2 \geqslant 4$ d) $2 \leqslant t^2 \leqslant 7$

Partie II: En utilisant la partie I-
Résoudre dans ℝ
a) $(x-4)^2 \leqslant 4$ b) $4 \leqslant (2x+1)^2 \leqslant 9$ c) $(3-x)^2 \geqslant 4$ d) $2 \leqslant (3x+1)^2 \leqslant 7$

VI-2 Pour encadrer le carré d'un nombre

VI-2-1 Encadrement d'un nombre au carré

Encadrer le nombre x^2 (en justifiant)

a) $\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 2$

b) $-5 \leqslant x < -\frac{3}{4}$

c) $-2 \leqslant x \leqslant 4$

VI-2-2 Encadrement d'une expression au carré

Encadrer $(x+5)^2$
a) lorsque $x \in [6 ; 9]$
b) lorsque $x \in [-10 ; -8]$
c) lorsque $x \in [-17 ; -3]$