(Prendre des notes dans le cahier de cours)

I- Définition

I-1 Rappel

Écrire les inverses des nombres suivants:

nombre	1	–1	0,5	0,25	–0,25	0,7	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{7}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}+1$
son inverse										

Existe-t-il des réels qui n'ont pas d'inverse? ....Si oui, le(s)quel(s)?....................................
Soit x un réel ...., son inverse est le réel ....
Le produit d'un réel par son inverse est égal à ....
Que peut-on dire des signes d'un réel et de son inverse? ....

I-2 Définition:

(Une définition s'apprend précisément. Chaque mot, chaque lettre, chaque symbole est important)

La fonction inverse est la fonction définie sur **]–∞; 0[∪]0; +∞[** (noté aussi $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$), qui, à un réel non nul, associe son inverse.

On note $x \mapsto \frac{1}{x}$ ou $t \mapsto \frac{1}{t}$ ou ...

II- Propriété: fonction impaire

II-1 Observation

On note f la fonction inverse
Trouver une relation entre $f(-x)$ et $f(x)$: ....

Remarque et définition:

On dit qu'une fonction f est une fonction impaire lorsqu'elle vérifie la propriété suivante:
Si $x \in E_f$ alors $-x \in E_f$ et $f(-x) = -f(x)$
Conséquence: la fonction inverse est une fonction impaire

II-2 Interprétation graphique d'une fonction impaire

(Prendre une feuille à carreaux)

Soit f une fonction impaire.
Dans un repère orthogonal, placer un point M quelconque. On suppose que M est un point de C_f d'abscisse x.
Quelle est l'ordonnée de M?...
Construire le point $M'(-x; f(-x))$.
Que peut-on dire de M et M'? ....
Résultat:
Lorsqu'une fonction f est impaire, sa représentation graphique C_f dans un repère est ....
....
(La réciproque est vraie)

III- Sens de variation de la fonction inverse.

L'objectif du paragraphe est double :

- comprendre une méthode pour étudier les variations d'une fonction.

- l'appliquer à la fonction inverse.

III-1 Rappel:

Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles où la fonction reste monotone (ne change

pas de variations).
On étudie toujours les variations d'une fonction sur un intervalle.
Conséquence: on doit étudier la variation de la fonction inverse d'une part sur .... et d'autre part sur ....

III-2 Méthode

On choisit deux réels a et b sur .... tels que a …...... b
et on cherche …........… ...... de $f(a)$ et $f(b)$
ou encore
on cherche le ….................................. de $f(b) - f(a)$.

III-3 Calculs:

On note f la fonction inverse
Soit $0 < a < b$, $f(b) - f(a) =$ ....
....;
Comme a....................... et b......................................, le produit ab est ....
Comme $a < b$, la différence $a - b$ est ....;
Finalement: le quotient .... est ....
Synthèse:
On a montré: Si $0 < a < b$ alors $f(a)$ .... $f(b)$
Conclusion: la fonction inverse est .... sur ....
Qu'est-ce qui change quand on étudie la variation de la fonction inverse sur $]-\infty;0[$?
....
....
....

III-4 Résumé dans un tableau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		‖	

La **double-barre** signifie que la fonction n'est pas définie en 0. Cette double-barre est infranchissable

III-5 À remarquer:

Montrer sur un exemple que la phrase :"la fonction inverse est strictement décroissante" n'a pas de sens.
Compléter la phrase pour qu'elle ait un sens:
la fonction inverse est strictement décroissante ....

IV- Représentation graphique de la fonction inverse.

L'objectif du paragraphe est double :

- comprendre une méthode pour construire la représentation graphique d'une fonction

- l'appliquer à celle de la fonction inverse.

IV-1 Tableau de valeurs:

x	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	1	2	4	5
$\frac{1}{x}$								

IV-2 Graphique

IV-2-1- Représentation graphique

Faire la représentation graphique dans un repère.

IV-2-2- Définition

La représentation graphique dans un repère ($O; I, J$) de la fonction inverse est une **hyperbole** de centre $O(0\,;0)$ d'équation $y=\dfrac{1}{x}$

Les axes de coordonnées sont les asymptotes de cette hyperbole.

V- Quelques calculs- Fonctions homographiques

V-1- Somme, produit, inverse ...

f est la fonction inverse.
a et b sont des réels non nuls.
A-t-on l'égalité $f(a+b) = f(a) + f(b)$?
A-t-on l'égalité $f(3a) = 3\times f(a)$?

V-2- Ensemble de définition

Quels sont les réels qui ont une image par g définie par : $g : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-2}$?

On note D_g cet ensemble.

Montrer que pour tout $x \in Dg$, $g(x) = 2 + \dfrac{5}{x-2}$

V-3- Fonctions homographiques

V-3- 1 Définition :

Une fonction homographique est une fonction f telle que $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec a, b, c et d réels et c non nul.

*(Une fonction homographique est le **quotient** d'une fonction affine par une fonction affine non constante)*

remarques :

f est définie pour les valeurs qui n'annulent pas le dénominateur, c'est-à-dire pour $x \neq$ ....

V-3-2- Propriétés

On peut démontrer les résultats suivants: (Résultats à reconnaître : pouvoir les appliquer sur des exemples (*un exemple au VI-1*))

1- On aura pour le tableau de variations :

x	$-\infty$	...	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

ou

x	$-\infty$	...	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

2- On peut écrire $f(x) = \dfrac{a}{c} + \dfrac{k}{cx+d}$ (forme canonique qui permet de faire l'étude de f)

3- f est représentée par une hyperbole

VI- Utilisation de la fonction inverse

(Prévoir une feuille pour chercher et noter ...)

VI-1 Pour étudier certaines fonctions où intervient la fonction inverse.

Exemple : Étudier la variation de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 3$ sur $]-\infty; 2[$, puis sur $]2; +\infty[$.

VI-2 Pour étudier certaines inéquations où intervient l'inverse d'un nombre

((***l'utilisation d'un graphique est fortement conseillée***)

Exemple: Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{x} > -\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{x} \leqslant 4$ d) $\frac{1}{x-1} \leqslant 4$

VI-3 Pour encadrer l'inverse d'un nombre

VI-3-1 Encadrement de l'inverse d'un nombre

(***l'utilisation d'un graphique est fortement conseillée***)

Encadrer lorsque c'est possible le nombre $\frac{1}{x}$ (en justifiant)

a) $\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 2$ b) $-5 \leqslant x < -\frac{3}{4}$ c) $-2 \leqslant x \leqslant 4$

VI-3-2 Encadrement de l'inverse d'une expression

Encadrer $\frac{1}{x+5}$ lorsque

a) $x \in [-3; 2]$
b) $x \in [-10; -6]$