Index

Rappels

Abscisse

Une ***abscisse*** est un nombre permettant de repérer un point sur un axe, sur une courbe ...

Droite graduée, droite réelle

Dire que (O, I) est un repère de la droite signifie que O a pour abscisse 0 et I a pour abscisse 1.

Les abscisses des points de la demi-droite [OI) sont notées positivement.

Les abscisses des points extérieurs à la demi-droite [OI) sont notées négativement.

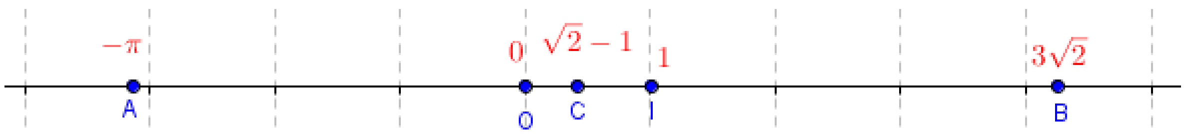
Dans le repère (O, I), à tout point M de la droite graduée est associé un et un seul nombre appelé abscisse de M

À tout nombre est associé un et un seul point de la droite graduée.

L'ensemble des nombres que vous connaissez actuellement en seconde est l'***ensemble des nombres réels*** noté $\mathbb{R}$.

La droite graduée est aussi appelée droite des réels.

Exemple



L'abscisse de A est $-\pi$, l'abscisse de B est $3\sqrt{2}$, l'abscisse de C est $\sqrt{2}-1$.

Intervalles

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

Symboles d'inégalité

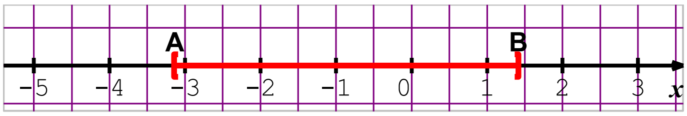
Symboles	Signification
$<$	
$>$	
$\leqslant$	
$\geqslant$	

I- Intervalles

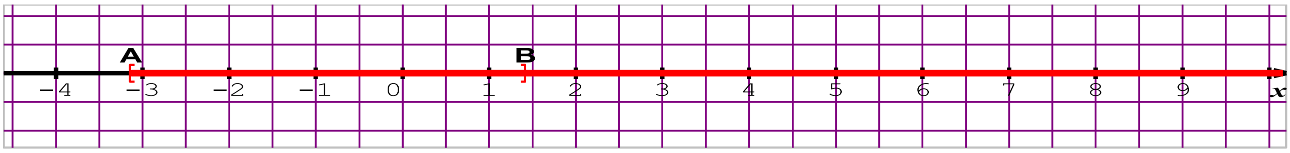
Dans ce paragraphe, l'abscisse de A est $-\pi$, l'abscisse de B est $\sqrt{2}$

Un segment $[AB]$ est l'ensemble de **tous** les points compris entre deux points A et B de la droite

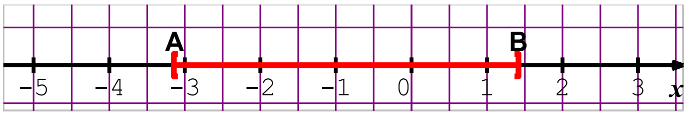
Un point M est un point du segment $[AB]$ s'écrit $M \in [AB]$.



Une demi-droite $[AB)$ l'ensemble non borné de **tous** les points à partir de A vers B.



Les **intervalles** traduisent dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ces différentes possibilités.



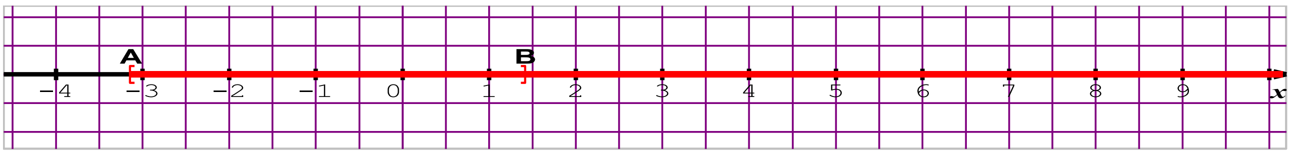
se traduit par l'intervalle $[-\pi;\ \sqrt{2}\ ]$.

Un nombre réel x appartient à l'intervalle $[-\pi;\ \sqrt{2}\ ]$ se note : $x \in [-\pi;\ \sqrt{2}\ ]$

On a : $x \in [-\pi;\ \sqrt{2}\ ]$ si et seulement si $-\pi \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$

On note les bornes de l'intervalle en lisant ***le plus petit nombre en premier***

En notant $[a\ ;\ b]$, on a nécessairement $a \leqslant b$.



se traduit par l'intervalle $[-\pi; +\infty[$.

$x \in [-\pi; +\infty[$ si et seulement si $x \geqslant -\pi$.

Pour indiquer que la droite est illimitée, il est nécessaire d'introduire **un symbole ∞ (infini)** auquel on attribue le signe + ou – selon le sens.

Intervalles

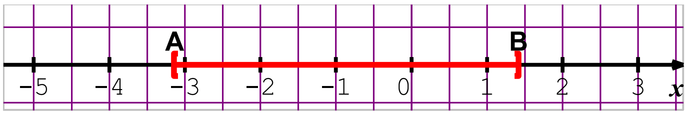
Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

+∞ et –∞ ne sont pas des nombres. Ce sont des notations pour indiquer que l'intervalle n'est pas borné.

Il existe deux sortes de crochets: les crochets fermés (remarquer que les « pattes » du crochet retiennent le nombre)

et les crochets ouverts (les « pattes » du crochet sont à l'extérieur. Elles ne retiennent pas le nombre).

I-1- Segments fermés et intervalles fermés

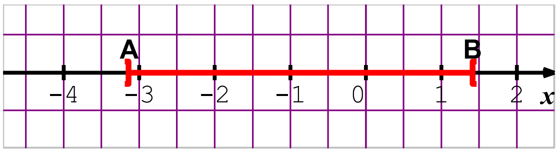


Les points A et B appartiennent au segment fermé $[AB]$.

Les nombres $-\pi$ et $\sqrt{2}$ appartiennent à l'intervalle fermé $[-\pi;\ \sqrt{2}\ ]$.

Dire que $x \in [-\pi;\ \sqrt{2}\ ]$ équivaut à $-\pi \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$

I-2- Segments ouverts et intervalles ouverts

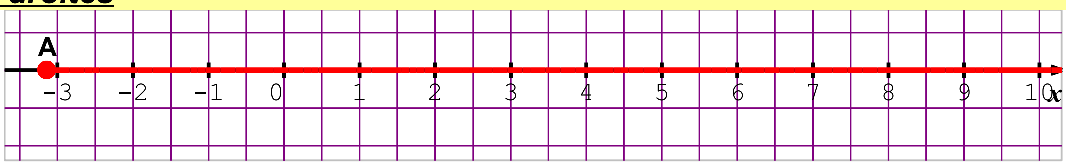


Les points A et B n'appartiennent pas au segment ouvert $]AB[$.

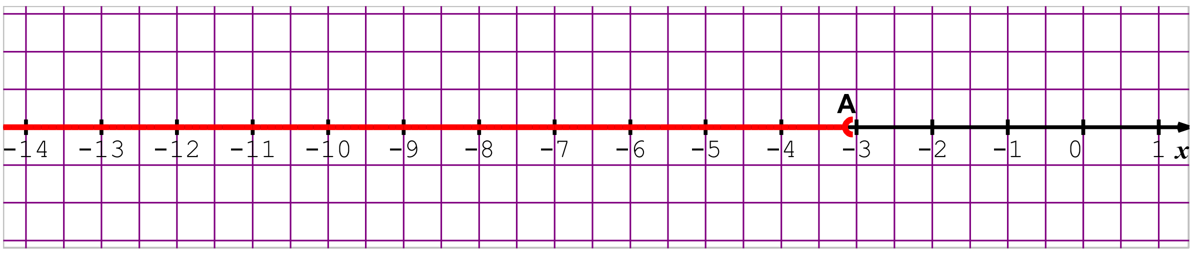
Les nombres $-\pi$ et $\sqrt{2}$ appartiennent à l'intervalle ouvert $]-\pi;\ \sqrt{2}\ [$.

$x \in\ ]-\pi;\ \sqrt{2}\ [$ si et seulement si $-\pi < x < \sqrt{2}$

I-3- Demi-droites

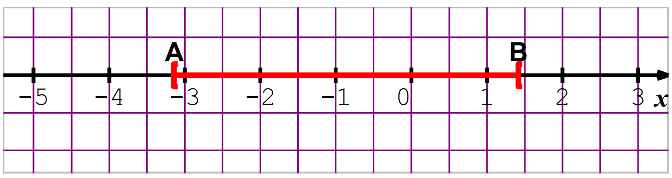


$x \in [-\pi;\ +\infty[$ si et seulement si $x \geqslant -\pi$.



$x \in\ ]-\infty;\ -\pi[$ si et seulement si $x < -\pi$.

I-4- Intervalles semi-ouverts ou semi-fermés



Le point A appartient au segment $[AB[$.

Le point B n'appartient pas au segment $[AB[$

Le nombre $-\pi$ appartient à l'intervalle $[-\pi;\ \sqrt{2}\ [$,

le nombre $\sqrt{2}$ n'appartient pas à l'intervalle $[-\pi;\ \sqrt{2}\ [$.

$x \in [-\pi;\ \sqrt{2}\ [$ si et seulement si $-\pi \leqslant x < \sqrt{2}$

I-5- Longueur de l'intervalle, centre de l'intervalle

On a vu dans le chapitre sur les repères que la longueur ou amplitude de l'intervalle $[a\ ;\ b]$ est $b - a$.

Le centre de l'intervalle est le nombre $c = \dfrac{a+b}{2}$

II- Réunion, intersection d'intervalles

II- 1- Réunion

Soient deux intervalles I et J.
Un nombre réel x appartient à la **réunion** des deux intervalles lorsqu'il appartient à l'un **ou** à l'autre de ces intervalles (Voir exercices).
On note: $I \cup J$, et, on lit: I union J.

II- 2- Intersection

Soient deux intervalles I et J.
Un nombre réel x appartient à l'**intersection** des deux intervalles lorsqu'il appartient à l'un **et** à l'autre de ces intervalles (Voir exercices).
On note: $I \cap J$, et, on lit: I inter J.

III- Exemples- Exercices

Encadrements, inégalités et intervalles

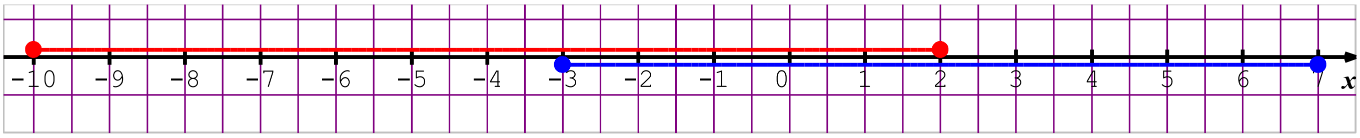
Encadrements ou inégalités	Intervalles
$x < 3$	$x \in\ ]-\infty;\ 3[$ Ensemble de tous les réels strictement inférieurs à 3
$-2 < x \leqslant 5$	$x \in\ ]-2;\ 5]$ Ensemble de tous les réels strictement supérieurs à –2 et inférieurs ou égaux à 5
$x \geqslant 0$	$x \in [0;\ +\infty[$ Ensemble de tous les réels supérieurs ou égaux à 0, c'est-à-dire: Ensemble de tous les réels positifs ou nuls
$10 \geqslant x > 3$	$x \in\ ]3;10]$ Ensemble de tous les réels strictement supérieurs à 3 et inférieurs ou égaux à 10
$5 \leqslant x$	$x \in [5;\ +\infty[$ Ensemble de tous les réels supérieurs ou égaux à 5

Intervalle- Double inégalité

$2x - 8 \in [-2;\ 8]$ équivaut à $-2 \leqslant 2x - 8 \leqslant 8$ ***On ajoute 8***
$2x - 8 \in [-2;\ 8]$ équivaut à $-2 + 8 \leqslant 2x - 8 + 8 \leqslant 8 + 8$ ***et on réduit, puis, on divise par 2***
$2x - 8 \in [-2;\ 8]$ équivaut à $\mathbf{3 \leqslant x \leqslant 8}$ On peut écrire: $\mathbf{x \in [3;\ 8]}$

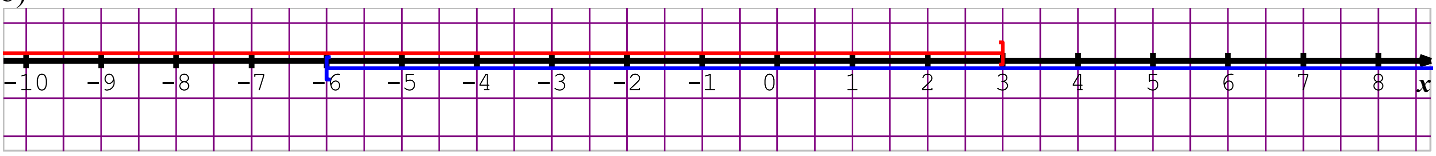
Réunion- Intersection d'intervalles

a)



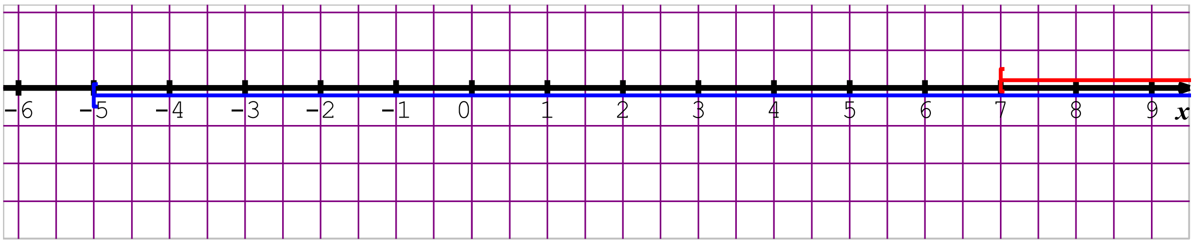
$I = [-10; 2]$, $J = [-3; 7]$ $\quad$ $I \cap J = [-3; 2]$ $\quad$ $I \cup J = [-10; 7]$

b)



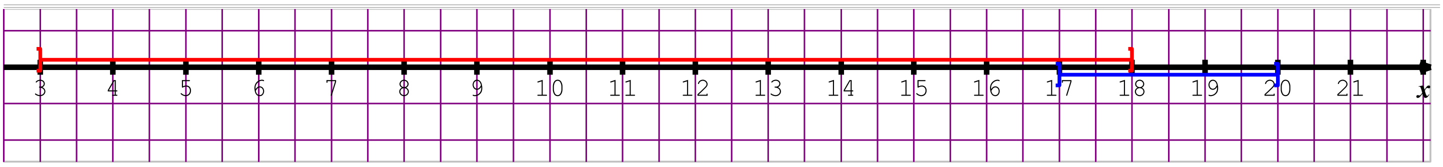
$I =]-\infty; 3]$, $J = [-6; +\infty[$ $\quad$ $I \cap J = [-6; 3]$ $\quad$ $I \cup J =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

c)



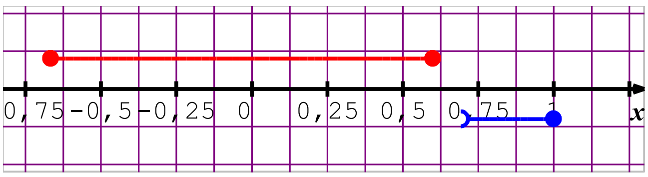
$I = [7; +\infty[$, $J = [-5; +\infty[$ $\quad$ $I \cap J = [7; +\infty[= I$ $\quad$ $I \cup J = [-5; +\infty[= J$

d)



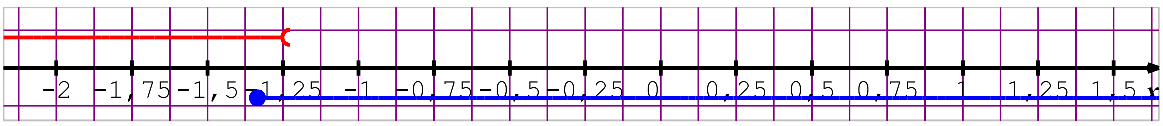
$I =]3; 18]$, $J =]17; 20]$ $\quad$ $I \cap J =]17; 18]$ $\quad$ $I \cup J =]3; 20]$

e) $I = \left[-\frac{2}{3}; \frac{3}{5}\right]$ et $J = \left]\frac{5}{7}; 1\right]$



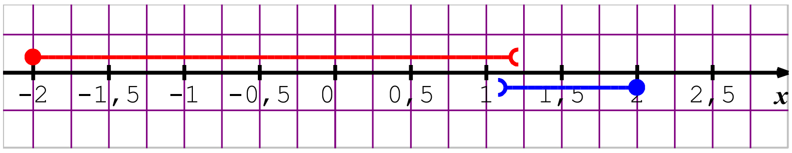
$I \cap J = \emptyset$ et $I \cup J = \left[-\frac{2}{3}; \frac{3}{5}\right] \cup \left]\frac{5}{7}; 1\right]$ (Aucune réduction possible. Les intervalles sont disjoints et leur réunion n'est pas un intervalle)

f) $I = \left]-\infty; -\frac{5}{4}\right[$ et $J = \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right[$



$I \cap J = \left[-\frac{4}{3}; -\frac{5}{4}\right[$ $\qquad$ $I \cup J = \mathbb{R}$.

g) $I = \left[-2\,;\frac{7}{6}\right[$ et $J = \left]\frac{9}{8}\,;2\right]$

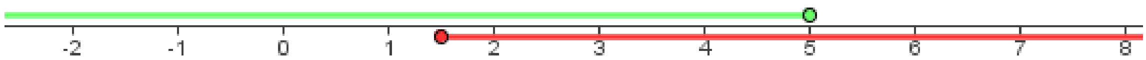


$I \cap J = \left]\frac{9}{8}\,;\frac{7}{6}\right[$ $\qquad$ $I \cup J = [-2;\,2]$

Système d'inéquations

a) $\begin{cases} 2x-3 \geqslant 0 \\ 5-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \frac{3}{2} \\ x \leqslant 5 \end{cases}$

En rouge, les réels supérieurs ou égaux à $\frac{3}{2}$, en vert, ceux inférieurs ou égaux à 5

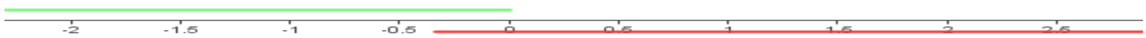


Les réels solutions du système sont ceux qui ont les deux couleurs à la fois

$$S_a = \left[\frac{3}{2}\,;5\right]$$

b) $\begin{cases} 3x+1>0 \\ -3x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\frac{1}{3} \\ x<0 \end{cases}$

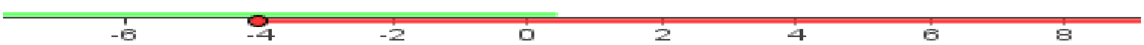
En rouge, les réels strictement supérieurs à $-\frac{1}{3}$, en vert, ceux strictement négatifs



Les réels solutions du système sont ceux qui ont les deux couleurs à la fois

$$S_b = \left]-\frac{1}{3}\,;0\right[$$

c) $\begin{cases} x+4 \geqslant 0 \\ 2-5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -4 \\ x<\frac{2}{5} \end{cases}$

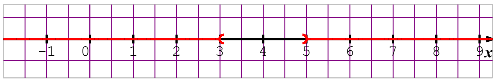
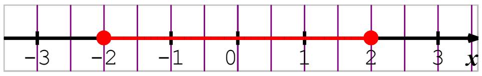
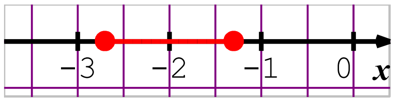
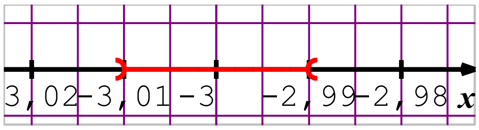
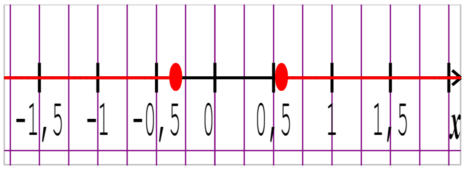


En rouge, les réels strictement supérieurs ou égaux à –4 , en vert, ceux strictement inférieurs à $\frac{2}{5}$

Les réels solutions du système sont ceux qui ont les deux couleurs à la fois

$$S_c = \left[-4;\frac{2}{5}\right[$$

Tableau synthétique

	Intervalles	inégalités	représentation	amplitude, centre, rayon
a)	]–∞; 3[∪]5; +∞[	$x < 3$ ou $x > 5$		XXXXXXX
b)	[–2; 2]	$-2 \leqslant x \leqslant 2$		amplitude : 4 centre : 0 rayon : 2
c)	[–2,7; –1,3]	$-2{,}7 \leqslant x \leqslant -1{,}3$		amplitude : 1,4 centre : –2 rayon : 0,7
d)	]–3,01; –2,99[	$-3{,}01 < x < -2{,}99$		amplitude : 0,02 centre : –3 rayon : 0,01
e)	$\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{7};+\infty\right[$	$x \leqslant -\frac{1}{3}$ ou $x \geqslant \frac{4}{7}$		XXXXXXXXX XXXXXXXX