

Index

Questions préliminaires.....1

I- Négation d'une phrase.....1

 I-1- Proposition.....1

 I-2- Négation d'une proposition.....1

 I-3- Exercice:.....2

II- Implication.....2

 II-1- Définition.....2

 II-2- Exercice.....2

 II-3- Vocabulaire: Condition suffisante, condition nécessaire.....2

 II-4- En pratique : Énoncés de théorèmes.....3

III- Équivalence.....3

 III-1- Définition:.....3

 III-2- Vocabulaire.....3

 III-3- Exercice.....3

IV- Contre-exemple, contraposée.....3

 IV-1 Rôle du contre-exemple.....3

 IV-2- Définition de la contraposée.....4

V- En pratique: un exemple commenté (Travail personnel)4

Questions préliminaires

1) On fait la proposition suivante:

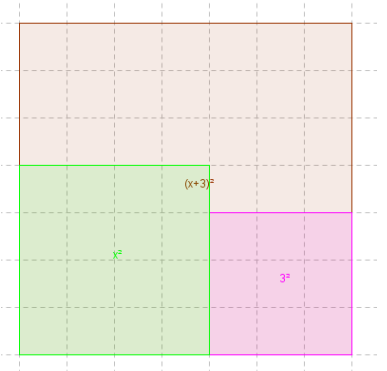
Soit x un réel strictement positif.

L'aire du carré de côté $x + 3$ est égale à la somme des aires des deux carrés de côtés respectifs x et 3 .

Cette proposition est-elle vraie? est-elle fausse?

Cette proposition est fausse.

Voir figure, ou bien, $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ est différent de $x^2 + 3^2$



2) On fait la proposition suivante:

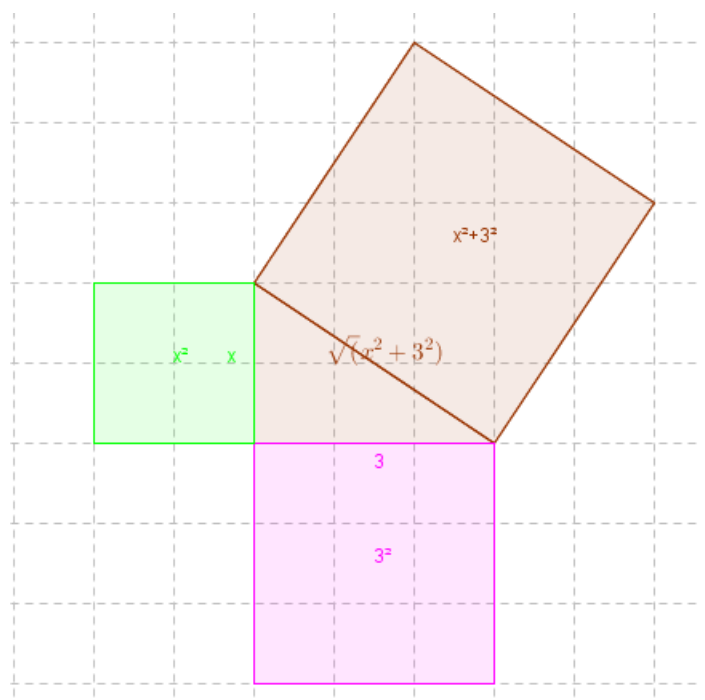
Soit x un réel strictement positif.

On construit un triangle rectangle tel que les côtés perpendiculaires sont de longueur x et 3 .

L'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des deux carrés construits sur les côtés perpendiculaires.

Cette proposition est-elle vraie? est-elle fausse?

Cette proposition est vraie (théorème de Pythagore).



I- Négation d'une phrase

I-1- Proposition

En mathématiques, une **proposition** est une phrase mathématique.

Une proposition peut être vraie ou fausse.

Dans les phrases qui suivent, la lettre x représente un nombre réel.

Indiquer si la phrase proposée est toujours vraie ou toujours fausse ou les conditions pour lesquelles elle est soit vraie, soit fausse.

	<i>Proposition</i>	<i>Vrai ou faux</i>
A1	Le carré d'un nombre réel est positif ou nul.	VRAI
A2	$x \leq 5$	lorsque $x \in]-\infty ; 5]$, Vrai lorsque $x \in]5 ; +\infty[$, Faux
A3	Il existe des rectangles qui ne sont pas des parallélogrammes	FAUX

I-2- Négation d'une proposition

Soit une phrase A .

La phrase B est la négation de la phrase A lorsque:

Si A est vraie alors B est fausse et si A est fausse alors B est vraie.

Vérifier que les phrases $B1, B2, B3$ suivantes sont les négations des phrases du I-1 :

	<i>Négation de la proposition A</i>	<i>Vrai ou faux</i>
B1	Il existe un réel qui a un carré strictement négatif.	FAUX
B2	$x > 5$	lorsque $x \in]-\infty ; 5]$, Faux lorsque $x \in]5 ; +\infty[$, Vrai
B3	Tous les rectangles sont des parallélogrammes	VRAI

I-3- Exercice:

Écrire la négation des phrases suivantes :

	<i>Phrase</i>	<i>Négation de la phrase</i>
1)	Dans le plan, les droites D et D' sont parallèles	Dans le plan, les droites D et D' ne sont pas parallèles ou encore Dans le plan, les droites D et D' sont sécantes
2)	Soit un réel x tel que $x \neq 1$	$x = 1$
3)	Pour tout $x, x \in \mathbb{N}$ (\mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels)	$x \notin \mathbb{N}$.
4)	Pour tout $x, x < 3$ ou $x > 7$	$x \geq 3$ ET $x \leq 7$, soit : $3 \leq x \leq 7$, soit : $x \in [3 ; 7]$
5)	I et J étant deux intervalles, $x \in I \cup J$	$x \notin I \cup J$, x n'appartient pas à (I ou J) x n'appartient ni à I , ni à J $x \notin I$ et $x \notin J$. Avec les notations utilisées en probabilités (événements contraires) : $x \in \bar{I}$ et $x \in \bar{J}$ $x \in \bar{I} \cap \bar{J}$
6)	I et J étant deux intervalles, $x \in I \cap J$	$x \notin I \cap J$, x n'appartient pas à (I et J) x n'appartient pas à I ou x n'appartient pas à J $x \notin I$ ou $x \notin J$. Avec les notations utilisées en probabilités (événements contraires) : $x \in \bar{I}$ ou $x \in \bar{J}$ $x \in \bar{I} \cup \bar{J}$

II- Implication

II-1- Définition

Une **implication** est une phrase mathématique indiquant qu'une donnée (p) entraîne (ou implique) une conclusion (q).

Elle s'écrit sous la forme: $(p) \Rightarrow (q)$ Le symbole \Rightarrow se lit: « implique »

Dans les théorèmes, elle est utilisée sous la forme: si (p) alors (q)

Le seul cas où une implication est fautive est le cas où (p) est vraie et (q) est fautive.

Dans tous les autres cas, l'implication est vraie.

(Autrement dit : dans une démarche d'argumentation logique, partir d'une donnée fautive ne peut pas permettre de démontrer ...).

II-2- Exercice

	<i>Implication</i>	<i>Vrai ou faux</i>
I1	$(x = 3) \Rightarrow (x^2 = 9)$	VRAI
I2	$(ABCD \text{ rectangle}) \Rightarrow (AC = BD)$	VRAI
I3	$[AC] \perp [BD] \Rightarrow (ABCD \text{ losange})$	FAUX (dessiner un contre-exemple)
I4	$(ABCD \text{ carré}) \Rightarrow (ABCD \text{ losange})$	VRAI
I5	$(ABC \text{ triangle rectangle en } A) \Rightarrow (AB^2 + AC^2 = BC^2)$	VRAI

II-3- Vocabulaire: Condition suffisante, condition nécessaire

La condition (p) est une condition **suffisante** de (q)

La condition (q) est une condition **nécessaire** de (p)

Dans les exemples:

$(x = 3)$ est une condition suffisante pour que $(x^2 = 9)$.

Il suffit d'avoir $(x = 3)$ pour être certain que $(x^2 = 9)$

Cette condition $(x=3)$ n'est pas nécessaire. Il existe au moins un autre réel dont le carré est 9.

Si $(x = 3)$ alors, (*nécessairement*), $x^2 = 9$

$[AC] \perp [BD]$ n'est pas une condition suffisante pour que $ABCD$ soit un losange.

On peut construire deux segments perpendiculaires sans obtenir un losange

Il ne suffit pas d'avoir $[AC] \perp [BD]$ pour affirmer que $ABCD$ est un losange.

Un **contre-exemple** est un cas où la condition suffisante est vérifiée (ici : on construit deux segments perpendiculaires) et où la condition nécessaire n'est pas vérifiée (le quadrilatère n'est pas un losange).

II-4- En pratique : Énoncés de théorèmes

Lors des apprentissages du cours : rechercher systématiquement dans les énoncés de théorèmes ou dans les propriétés étudiées les conditions suffisantes et les conditions nécessaires.

Les conditions suffisantes sont celles à vérifier (à prouver) pour utiliser le théorème ou la propriété permettant d'amener la conclusion.

Exemple commenté :

Dans le triangle ABC , la hauteur issue de A coupe $[BC]$ en H . (H est sur le segment $[BC]$).

On sait : $AB = 30$, $BH = 18$, $AC = 40$.

Calculer BC .

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Démonstration	Commentaires
Puisque $[AH]$ est une hauteur de ABC , le triangle ABH est un triangle rectangle en H .	Ainsi, on a la condition suffisante du théorème de Pythagore
Dans le triangle ABH rectangle en H , $AB^2 = AH^2 + BH^2$	on peut conclure $AH = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24$
De même, le triangle ACH est un triangle rectangle en H ,	on peut conclure $CH = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32$

$AC^2 = AH^2 + CH^2$	
Comme $H \in [BC]$	condition suffisante pour utiliser la propriété : si $C \in [AB]$ alors $AC + CB = AB$.
$BC = BH + HC$	on peut conclure ... $BC = 18 + 32 = 50$
$BC^2 = 2\,500, AB^2 = 900, AC^2 = 1\,600$ $2\,500 = 900 + 1\,600$	Ainsi, on a la condition suffisante de la réciproque du théorème de Pythagore.
on peut conclure : le triangle ABC est un triangle rectangle en A .	

III- Équivalence

III-1- Définition:

Dans certains cas lorsque l'implication $(p) \Rightarrow (q)$ est vraie, l'implication réciproque $(q) \Rightarrow (p)$ est également vraie.

On dit que les propositions (p) et (q) sont **équivalentes**.

On note $(p) \Leftrightarrow (q)$.

Le symbole \Leftrightarrow se lit: « équivaut à »

On énonce le théorème sous la forme: (p) si et seulement si (q) .

Une équivalence est vraie lorsque (p) et (q) sont vraies en même temps et lorsque (p) et (q) sont fausses en même temps.

Une équivalence est fautive lorsque l'une des conditions est vraie et l'autre fautive.

Résumé:

Phrase p	Phrase q	$(p) \Rightarrow (q)$	$(q) \Rightarrow (p)$	$(p) \Leftrightarrow (q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

III-2- Vocabulaire

$(q) \Rightarrow (p)$ est la **réciproque** de $(p) \Rightarrow (q)$

Lorsque $(p) \Leftrightarrow (q)$: (p) est une **condition nécessaire et suffisante** de (q)

III-3- Exercice

Voici les énoncés des implications réciproques de I1, I2, I3 et I4 des exemples du II-2. Compléter :

	Énoncé de la réciproque	Vrai ou faux
RI1	$(x^2 = 9) \Rightarrow (x = 3)$	FAUX (on peut avoir $x = -3$)
RI2	$(AC = BD) \Rightarrow (ABCD \text{ rectangle})$	FAUX (dessiner un contre-exemple)
RI3	$(ABCD \text{ losange}) \Rightarrow [AC] \perp [BD]$	VRAI
RI4	$(ABCD \text{ losange}) \Rightarrow (ABCD \text{ carré})$	FAUX (dessiner un contre-exemple)
RI5	$(AB^2 + AC^2 = BC^2) \Rightarrow (ABC \text{ triangle rectangle en } A)$	VRAI

IV- Contre-exemple, contraposée

IV-1 Rôle du contre-exemple

Pour démontrer qu'une proposition est fautive, il suffit de trouver un exemple qui contredit cette proposition.

" Si $x^2 > 4$ alors $x > 2$ " est une proposition fautive.

Contre-exemple : $x = -3$.

La condition suffisante : $(-3)^2 = 9$ et $9 > 4$ est vérifiée

alors que la condition nécessaire $-3 > 2$ n'est pas vérifiée.

IV-2- Définition de la contraposée

Lorsqu'une implication est donnée : Si (Condition suffisante) alors (condition nécessaire),

la contraposée s'énonce sous la forme :

Si (négarion de la condition nécessaire) alors (négarion de la condition suffisante).

Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en A .

La contraposée :

Si ABC n'est pas un triangle rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$

Une implication et sa contraposée sont des propositions équivalentes.

Autrement dit : Pour démontrer une implication, on peut démontrer sa contraposée .

Exemple commenté :

$n \in \mathbb{N}$ (n est un entier naturel)

Démontrer la proposition suivante : si n^2 est un entier pair alors n est un entier pair. (1)

La contraposée de (1) est : si n est un entier impair alors n^2 est un entier impair. (2)

Condition suffisante de (2) : n est un entier impair,

d'où, n peut s'écrire $n = 2k + 1$ où $k \in \mathbb{N}$.

$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2q + 1$ où $q = 2k^2 + 2k$ est un entier.

conclusion : n^2 est un entier impair.

On a montré la condition nécessaire de (2).

Comme (2) est démontrée, la proposition (1) est vraie.

Vrai-Faux

Voici une proposition (P), écrire sa réciproque (RP), la contraposée de la proposition (CP) et la contraposée de la réciproque (CRP).

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse.

P1 : f étant une fonction définie sur \mathbb{R} , si $f(1) < f(2)$ alors f est strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

P2 : ABC étant un triangle, si la médiane issue de A est confondue avec la hauteur issue de A alors le triangle ABC est isocèle en A .

P3 : A , B et C sont trois points du plan.

Si $AB + BC = AC$ alors A , B et C sont alignés.

P1 : f étant une fonction définie sur \mathbb{R} , si $f(1) < f(2)$ alors f est strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

P1 est fausse. (Tout peut arriver entre 1 et 2).

Réciproque de P1 :

RP1 : f étant une fonction définie sur \mathbb{R} , si f est strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$ alors $f(1) < f(2)$

RP1 est vraie. (par définition d'une fonction strictement croissante)

Contraposée de P1

CP1 : f étant une fonction définie sur \mathbb{R} , si f n'est pas strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$ alors $f(1)$ n'est pas strictement inférieur à $f(2)$

CP1 est fausse (comme P1). (Tout peut arriver entre 1 et 2).

Contraposée de RP1

CRP1 : f étant une fonction définie sur \mathbb{R} , si $f(1)$ n'est pas strictement inférieur à $f(2)$ alors f n'est pas strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

CRP1 est vraie. (comme RP1)

P2 : ABC étant un triangle, si la médiane issue de A est confondue avec la hauteur issue de A alors le triangle

ABC est isocèle en A .

P2 est vraie (la médiane et la hauteur étant confondues, on obtient la médiatrice de $[BC]$, le point A est donc équidistant de B et C)

RP2 : ABC étant un triangle, si le triangle ABC est isocèle en A alors la médiane issue de A est confondue avec la hauteur issue de A

RP2 est vraie (*Propriété des triangles isocèles*).

CP2 : ABC étant un triangle, si le triangle ABC n'est pas isocèle en A alors la médiane issue de A n'est pas confondue avec la hauteur issue de A

CP2 est vraie (comme P2).

CRP2 : ABC étant un triangle, si la médiane issue de A n'est pas confondue avec la hauteur issue de A alors le triangle ABC n'est pas isocèle en A .

CRP2 est vraie (comme RP2)

P3 : A , B et C sont trois points du plan.

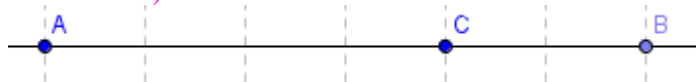
Si $AB + BC = AC$ alors A , B et C sont alignés.

P3 est vraie (propriété du " plus court chemin est la ligne droite ...)

RP3 : A , B et C sont trois points du plan.

Si A , B et C sont alignés alors $AB + BC = AC$.

RP3 est fausse (B doit être entre A et C)



Sur ce schéma : A , B , C sont alignés mais $AC = 4$ n'est pas égal à $AB + BC = 6 + 2 = 8$

CP3 : : A , B et C sont trois points du plan.

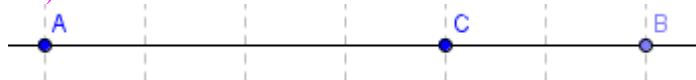
Si A , B et C ne sont pas alignés alors $AB + BC \neq AC$.

CP3 est vraie (comme P3)

CRP3 : A , B et C sont trois points du plan.

Si $AB + BC \neq AC$ alors A , B et C ne sont pas alignés.

CRP3 est fausse (comme RP3)



Sur ce schéma : AC n'est pas égal à $AB + BC$ mais A , B , C sont alignés.